ÉCOLE POLYTECHNIQUE

IP PARIS

CONCOURS D'ADMISSION 2020

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Samedi 14 Mars 2020 de 08h30 à 11h30

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

L'objet de ce problème est d'établir certaines inégalités pour la trace d'un produit de matrices, découvertes par John Von Neumann en 1937.

On notera $A^\top$ la transposée d'une matrice A, et $\mathrm{tr}(A)$ sa trace. On rappelle qu'une matrice P est orthogonale si $P^\top P = I$, où I désigne la matrice identité. On note $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, S_n l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles (i.e. telles que $M^\top = M$) et A_n celui des matrices antisymétriques (i.e. telles que $M^\top = -M$).

Les questions de la première partie, numérotées de 1 à 7, sont largement indépendantes les unes des autres. Les parties 2 et 3 reposent partiellement sur les résultats établis à la partie 1.

Partie 1 : Questions préliminaires

1. L'objet de cette question est de montrer l'inégalité suivante dite *de réarrangement* : étant données deux suites croissantes finies de réels $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, alors pour toute bijection σ de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui même, on a

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leqslant a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

(a) Montrer l'inégalité pour $n = 2$.

(b) En déduire le cas général par récurrence sur n. (indication : on cherchera à se ramener au cas où $\sigma(n) = n$)

2. On rappelle que l'exponentielle d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

On rappelle que si $MN = NM$ alors $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$.

(a) Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tA) = A.$$

(b) Montrer que si M est une matrice antisymétrique, alors $\exp(M)$ est orthogonale.

3. Dans cette question on montre le théorème suivant : si A et B sont des matrices symétriques telles que $AB = BA$ alors il existe une matrice orthogonale P et des matrices diagonales D_A et D_B telles que $A = P^\top D_A P$ et $B = P^\top D_B P$.

(a) Si λ est une valeur propre de A, montrer que $\ker(A - \lambda I)$ est stable par B.

(b) Démontrer le théorème.

4. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = A_n \oplus S_n$

5. Pour $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$

(a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que relativement à ce produit scalaire on a $S_n = (A_n)^\perp$.

6. Soit D une matrice diagonale de taille n, dont les coefficients diagonaux sont notés $d_1, \dots, d_n$. Montrer que la matrice $M \in M_{2n}(\mathbb{R})$ dont l'écriture par blocs est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres (on pourra commencer par traiter le cas $n = 1$).

7. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fermé et borné de $M_n(\mathbb{R})$.

Partie 2 : Inégalité de Von Neumann pour les matrices symétriques

Soient A et B des matrices symétriques dans $M_n(\mathbb{R})$. On note $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ (resp. $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$) les valeurs propres de A (resp. B) rangées dans l'ordre croissant et répétées autant de fois que leur multiplicité. L'objectif de cette partie est de montrer l'inégalité suivante :

$$\operatorname{tr}(AB) \leqslant a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

8. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles dont les valeurs propres (répétées autant de fois que leur multiplicité) sont $b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. Montrer que $C \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $C = P^\top B P$.

9. Montrer qu'il existe $C_0 \in \mathcal{C}$ telle que

$$\operatorname{tr}(AC_0) = \max \{\operatorname{tr}(AC),\ C \in \mathcal{C}\}.$$

10. Pour $M, C \in M_n(\mathbb{R})$ quelconques et $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$\varphi_M(t) = \operatorname{tr}\big(A \exp(tM) C \exp(-tM)\big).$$

Calculer $\varphi_M'(0)$.

11. Montrer que si $C = C_0$ et M est antisymétrique alors $\varphi_M'(0) = 0$.

12. En déduire que $AC_0 = C_0 A$.

13. Conclure que $\operatorname{tr}(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ et caractériser le cas d'égalité.

14. Montrer que l'on a également

$$\operatorname{tr}(AB) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}.$$

Partie 3 : Valeurs singulières et inégalité de Von Neumann dans le cas général

15. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

(a) Montrer que la matrice $A^\top A$ est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice symétrique S, dont les valeurs propres sont strictement positives, telle que $A^\top A = S^2$.

(b) Montrer qu'il existe une matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = OS$.

(c) Montrer qu'il existe des matrices orthogonales U et V et une matrice diagonale D à coefficients strictement positifs telle que $A = UDV$.

16. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est quelconque, il existe des matrices orthogonales U et V et une matrice diagonale D à coefficients positifs telle que $A = UDV$.

On admettra que les coefficients diagonaux de D sont définies de façon unique (i.e. si $A = U'D'V'$ est une autre telle décomposition alors D et D' ont les mêmes coefficients diagonaux, à permutation près). Les coefficients diagonaux de D, positifs par définition, sont appelés *valeurs singulières* de A.

On se donne maintenant M et N dans $M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs singulières (répétées autant de fois que leur multiplicité) sont respectivement notées $\sigma_1 \leqslant \cdots \leqslant \sigma_n$ et $\tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^\top & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & N^\top \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

17. Montrer que les valeurs propres de A sont $-\sigma_n \leqslant \cdots \leqslant -\sigma_1 \leqslant \sigma_1 \leqslant \cdots \leqslant \sigma_n$.

18. En déduire que

$$\operatorname{tr}(MN) \leqslant \sigma_1\tau_1 + \cdots + \sigma_n\tau_n,$$

puis que

$$|\operatorname{tr}(MN)| \leqslant \sigma_1\tau_1 + \cdots + \sigma_n\tau_n.$$

◇ ◇ ◇