CONCOURS D'ADMISSION 2020

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°3

PHYSIQUE

Dimanche 15 Mars 2020 de 08h30 à 11h30

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Préambule :

L'ensemble du problème porte sur les propriétés de l'électromagnétisme, théorie du rayonnement unifiée par Maxwell à la fin du XIXème siècle. On rappelle que les 4 équations portant son nom permettent de décrire le lien existant entre le champ électromagnétique et ses sources, les charges et les courants. Elles s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\
\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Le problème comporte 2 exercices indépendants. Le premier porte sur l'invariance de jauge de l'électromagnétisme et ses conséquences sur la conservation de la charge et le choix des potentiels. Le second exercice s'intéresse aux effets de la polarisation de la matière sous l'effet du champ électromagnétique.

Formulaire :

Charge élémentaire : e = $1{,}60\cdot10^{-19}$ C

Célérité de la lumière dans le vide : c = $3{,}0\cdot10^{8}$ $\mathrm{m.s^{-1}}$

Opérateurs d'analyse vectorielle du premier ordre en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&\mathrm{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Opérateurs d'analyse vectorielle du premier ordre en coordonnées sphériques :

$$\vec{\mathrm{grad}} f(r,\theta,\phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{v} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta v_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right), \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r}\right), \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right)$$

Opérateurs d'analyse vectorielle du second ordre (Laplaciens) :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)) = \Delta f \\
&\vec{\Delta}\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})).
\end{aligned}$$

Développement de Taylor de la fonction f :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

où le reste $R_n(x)$ est une fonction négligeable par rapport à $(x-a)^n$ au voisinage de a.

Exercice 1: Invariance de jauge et potentiels en électromagnétisme

1 – Montrer que pour tout champ vectoriel $\vec{v}$, on a : $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})) = 0$.

2 – En déduire que l'on peut définir un potentiel vecteur $\vec{A}$ dont « dérive » le champ magnétique suivant la relation : $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$.

3 – Établir que le champ électrique « dérive » également de deux potentiels, l'un des deux étant le potentiel vecteur $\vec{A}$ défini à la question précédente, l'autre étant un potentiel scalaire V. Donner la relation entre $\vec{E}$, $\vec{A}$ et V.

4 – A partir de la relation précédente retrouver la définition du potentiel électrique V dans le cas statique : $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$. On notera que le signe « - » est purement conventionnel et l'on adoptera la même convention dans le cas général considéré à la question précédente.

Ce potentiel statique est-il défini de manière unique ? Quelle(s) conséquence(s) cela peut-il avoir notamment dans l'étude des circuits électriques ? On se propose de généraliser cette propriété au cas non statique dans la suite de l'exercice.

5 – Montrer que les couples de potentiels $(V, \vec{A})$ et $(V', \vec{A}')$ définissent les mêmes champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'ils se déduisent l'un de l'autre par la transformation suivante :

$$\begin{aligned} V' &= V - \frac{\partial f}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \end{aligned}$$

où $f = f(t, M)$ est une fonction quelconque du temps et de l'espace.

La transformation précédente est appelée **transformation de jauge**.

6-a – Application : trouver les champs et les distributions de charges correspondants aux potentiels suivants :

$$\begin{aligned} V &= 0 \\ \vec{A} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\vec{e_r} \end{aligned}$$

où l'on s'est placé dans un système de coordonnées sphériques.

6-b Pour transformer les potentiels de la question précédente, utiliser le changement de jauge suivant : $f = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{qt}{r}$. Commenter le résultat.

7 – En partant des équations de Maxwell et de la définition des potentiels, montrer que ces derniers sont solutions des équations suivantes dans le cas général :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{j} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) \\ \Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

8 – D'après la question 5- il existe une infinité de possibilité de définir les potentiels dont dérivent les champs électromagnétiques. Ce choix, dit de jauge, permet de fixer une famille de fonction f particulière. Une jauge fréquemment utilisée est la jauge de Lorentz qui s'écrit :

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Comment ce choix simplifie-t-il les équations des potentiels ?

9 – Montrer que ce choix de jauge conduit à choisir la famille de fonction f solution de l'équation suivante :

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

10 – Comment nomme-t-on cette équation ? On s'intéresse aux solutions de cette équation à une dimension.

Montrer que l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} &= 0 \\ \text{avec} \quad u &= x - ct \\ \text{et} \quad v &= x + ct \end{aligned}$$

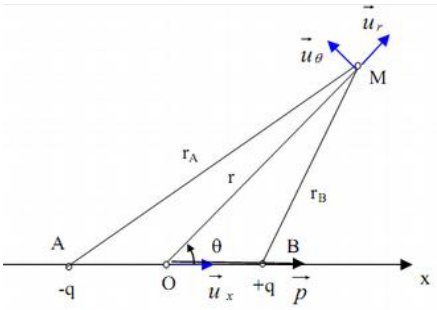
11 – Écrire la forme la plus générale de la solution $f(x, t)$. Mettre en évidence la présence d'un terme « progressif » et d'un terme « régressif ».

12 – D'un point de vue théorique cette liberté de jauge provient d'une symétrie intrinsèque de l'électromagnétisme. On montre qu'une conséquence importante de l'existence d'une symétrie dans un système est la conservation d'une quantité (théorème de Noether). La quantité conservée dans le cas de l'électromagnétisme est la charge électrique. A partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de conservation de la charge électrique liant les variations spatio-temporelles de la densité volumique de charge, ρ, à celles du vecteur densité de courant électrique, $\vec{j}$.

Exercice 2: Électromagnétisme dans la matière: relation Clausius-Mossotti

Dans cet exercice on cherche à calculer le champ local « vu » par une molécule polarisée dans un milieu soumis aux effets d'un champ électrique extérieur. Les deux premières parties de l'exercice propose de calculer le champ électrique de quelques distributions de charges discrètes. Dans la dernière partie on s'intéressera à l'application de certains de ces résultats dans la matière.

Première partie. On considère la géométrie suivante dans laquelle les 3 points A, O et B sont alignés, O étant le milieu du segment $[AB]$. On s'intéresse au champ électrique créé en un point M repéré par ses coordonnées r, θ et φ. On suppose que le système est totalement symétrique selon φ. On posera $OA = OB = a$



On rappelle que dans le triangle OMB, on a les relations suivantes entre les distances (Pythagore généralisé) :

$$BM^2 = OM^2 + OB^2 - 2\cos\theta \cdot OM \cdot OB$$

1 – Rappeler en quoi consiste l'approximation dipolaire et quelle(s) condition(s) elle impose entre les différentes distances utilisées dans le problème.

2 – On s'intéresse dans cette question au modèle de doublet électrique, dans lequel deux charges opposées $+q$ et $-q$ sont localisées aux points B et A respectivement. Calculer le potentiel électrique créé au point M par cette distribution dans l'approximation dipolaire.

3 – Définir le moment dipolaire électrique $\vec{p}$ de cette distribution. Une unité couramment utilisée pour le moment dipolaire est le Debye (symbole D) dont la valeur est : $1D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29}$ C·m. Justifier l'intérêt de l'utilisation d'une telle unité pour des systèmes atomiques.

4 – Généraliser la définition du moment dipolaire à une distribution discrète de N charges q_i placées en des points M_i dans l'approximation dipolaire. Même question si les charges sont distribuées continûment avec une densité volumique de charge $\rho(M)$.

5 – Calculer le champ électrique créé par le doublet électrique au point M. Montrer qu'il se met sous la forme suivante :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left(3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}\right).$$

Deuxième partie. Dans cette question, on cherche à calculer le champ électrique créé par une distribution constituée de 3 charges ponctuelles, deux charges négatives (-*q*) aux points A et B et une charge positive (+2*q*) au centre O.

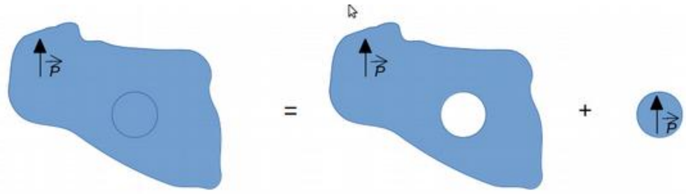
6 – Exprimer le potentiel électrostatique créé par la distribution au point M. Justifier l'ordre des développements à effectuer.

7 – En déduire le champ électrique créé au point M.

8 – Une telle distribution est dite quadrupolaire. Justifier cette dénomination. On pourra par exemple caractériser cette distribution en termes de charge totale, de moment dipolaire électrique et conclure.

9 – En comparant les champs électriques d'une charge ponctuelle, d'un doublet électrique et d'un quadrupole électrique, établir les caractéristiques générales du développement « multipolaire » d'une distribution quelconque de charges électriques.

Troisième partie. On considère un milieu diélectrique dans lequel les atomes possèdent des moments dipolaires électriques. On appelle vecteur « polarisation » le moment dipolaire moyen par unité de volume. On soumet un échantillon de ce matériau à un champ électrique total $\vec{E}$. Pour caractériser le champ réel, local, « vu » par un atome, on doit imaginer que l'on isole cet atome dans une petite sphère vide dont il occupe le centre. Par application du principe de superposition le champ local « vu » par l'atome est le champ total auquel on soustrait la contribution de la petite sphère et des dipôles qu'elle contient. Ceci se traduit par le schéma et l'équation ci-dessous.



$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{local}} + \vec{E}_P$$

10 – On cherche dans un premier temps à calculer le champ $\vec{E}_P$ créé par la sphère Σ (de centre O, de rayon R_0) uniformément polarisée dans laquelle le vecteur polarisation $\vec{P}$ défini plus haut est considéré comme constant. Justifier que le potentiel créé par cette distribution en un point M quelconque s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_\Sigma \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} d\tau = \vec{P} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau \right) \equiv \vec{P} \cdot \vec{I}.$$

où le vecteur $\vec{r}$ relie un point courant de la distribution et le point M. Les questions qui suivent s'intéressent au calcul de l'intégrale $\vec{I}$.

11 – Montrer que l'intégrale $\vec{I}$ correspond au champ électrique créé par une distribution continue de charges, à symétrie sphérique, et de densité volumique unitaire.

12 – Calculer $\vec{I}$ pour un point M à l'intérieur de la sphère.

13 – Même question pour un point à l'extérieur de la sphère.

14 – En déduire que le champ électrique $\vec{E}_P$ à l'intérieur de la sphère est proportionnel à $\vec{P}$. Le déterminer.

15 – On note N le nombre d'atomes par unité de volume du matériau et on considère que l'on a la relation suivante entre le vecteur polarisation $\vec{P}$ et le moment dipolaire électrique individuel de chaque atome $\vec{p}$: $\vec{P} = N\vec{p}$. On définit la susceptibilité électrique χ_e du milieu par : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$. Pour chaque atome on définit la polarisabilité α_e par : $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_e \vec{E}_{\text{local}}$. Donner les dimensions des coefficients χ_e et α_e.

16 – Montrer que l'on a la relation suivante, dite de Clausius-Mossotti :

$$\chi_e = \frac{N\alpha_e}{1 - N\alpha_e/3}.$$

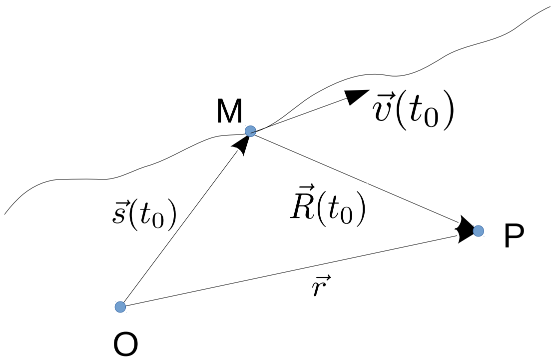
17 – Que devient cette relation dans un milieu dilué pour lequel la densité N est telle que $N \ll 1$? Ce résultat est-il cohérent avec le modèle qui a servi à établir la relation de Clausius-Mossotti ?

Exercice 3: Champs rayonnés par une particule chargée en mouvement

Soit une particule chargée en mouvement le long d'un trajectoire décrite par l'abscisse curviligne $s(t_0)$. Le champ électrique rayonné par cette particule et observé au point *P*, dont la position est repérée par le vecteur $\vec{r}$, à l'instant t, s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}\left[\frac{1}{R^2}(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c})(1-\frac{v^2}{c^2}) + \frac{1}{Rc^2}\left(\vec{n}\wedge\left((\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c})\wedge\vec{a}\right)\right)\right]$$

Les différentes notations utilisées dans la formule précédente sont résumées ci-dessous :



Le vecteur $\vec{n}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{R}$. Le vecteur $\vec{a}$ désigne l'accélération de la particule. Toutes les quantités dépendantes du temps dans l'expression du champ électrique sont évaluées au temps t_0 tel que :
$t_0 = t - \dfrac{R(t_0)}{c}$.

1 – Justifier l'origine du décalage temporel entre t et t_0 et l'expression de ce dernier.

2 – Quelles sont les conditions cinématiques (ordre de grandeur de la vitesse de la particule, direction d'émission etc) qui conduisent aux plus grandes amplitudes du champ électrique ?

3 – Quels sont les termes prépondérants du champ électrique à grandes distances ? Justifier.

4 – On considère une charge ponctuelle en mouvement circulaire uniforme (cercle de rayon b) à la vitesse angulaire uniforme ω. On supposera que le cercle est centré en O, dans le plan (Oxy) et qu'à l'instant initial ($t=0$) la particule se situe au point de coordonnées ($b,0$). On cherche l'expression des champs rayonnés au point O. Exprimer t_0 en fonction de t. Exprimer $R(t_0)$ en fonction du rayon de la trajectoire.

5 – Paramétrer la trajectoire de la particule dans le plan (Oxy) en fonction du temps. Exprimer de même les vecteurs vitesse et accélération de la particule.

6 – Montrer que dans ces conditions : $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$. On rappelle que $\vec{n}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{R}$.

7 – En déduire que le champ électrique s'exprime comme :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R^2}(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}) - \frac{1}{Rc^2}\vec{a}\right]$$

On rappelle que : $\vec{i}\wedge(\vec{j}\wedge\vec{k}) = (\vec{i}\cdot\vec{k})\vec{j} - (\vec{i}\cdot\vec{j})\vec{k}$.

8 – On montre que le champ magnétique résultant s'écrit : $\vec{B}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{c}\left(\vec{n} \wedge \vec{E}(\vec{r},t)\right)$

En déduire que le champ magnétique au centre vaut :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\omega}{Rc^2}\right]\vec{e}_z$$

9 – Discuter les symétries de l'expression précédente et commenter les particularités de cette expression.

10 – En modélisant le mouvement de la charge par une distribution de courant I, retrouver l'expression du champ magnétique au centre d'une spire.