CONCOURS D'ADMISSION 2020

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 1_Automne

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Vendredi 13 Septembre 2019 de 08h30 à 11h30

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Préambule

Ce problème porte sur quelques questions classiques d'analyse réelle. Dans la partie 1 on définit la moyenne arithmético-géométrique et dans la partie 2 on montre (suivant Gauss) que celle-ci permet de calculer certaines intégrales, dites *intégrales elliptiques*. La partie 3 est indépendante des précédentes, et est consacrée à l'étude de l'équation différentielle du pendule simple. Dans la partie 4 on montre comment exprimer la période d'oscillation du pendule à l'aide d'une intégrale elliptique.

On attachera la plus grande importance au soin, à la clarté et à la précision de la rédaction. En particulier la validité des changements de variables devra être justifiée avec soin.

Partie 1 : Moyenne arithmético-géométrique.

Étant donnés deux réels a et b strictement positifs, on définit deux suites réelles $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n \geqslant b_n$, $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.

2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune.

Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b et sera notée $M(a,b)$.

3. (a) Pour $n \geqslant 0$ on pose $\eta_n = a_n - b_n$. En considérant l'expression $a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2$, trouver une relation entre η_n, η_{n+1} et a_{n+2} et en déduire que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\eta_{n+1} \leqslant \frac{\eta_n^2}{8M(a,b)}.$$

(b) En déduire que pour tout $\eta > 0$ il existe une constante K et un entier n_0 tels que pour $n \geqslant n_0$ on a

$$\eta_n \leqslant K\eta^{2^{n-n_0}}.$$

(c) Conclure que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|a_n - M(a,b)| = o(\varepsilon^n)$ et $|b_n - M(a,b)| = o(\varepsilon^n)$ quand $n \to \infty$.

Partie 2 : Intégrales elliptiques.

Pour $a, b > 0$ on pose

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \text{ et } J(a,b) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt,$$

qui sont respectivement appelées *intégrales elliptiques de première et deuxième espèce.*

(On pourra remarquer que $4J(a,b)$ est la longueur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, d'où la terminologie.)

4. On pose
$$\widetilde{I}(a,b) = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,.$$
Montrer que l'intégrale $\widetilde{I}(a,b)$ est bien définie, puis, à l'aide du changement de variable $u = b\tan t$, justifier que $I(a,b) = \widetilde{I}(a,b)$.

5. (a) Justifier que le changement de variable $u = \frac{1}{2}\left(v - \frac{ab}{v}\right)$ est bien défini de $]0,\infty[$ sur un intervalle à préciser.

(b) En déduire que $\widetilde{I}(a_1,b_1) = \widetilde{I}(a,b)$, où a_1 et b_1 sont comme à la partie 1.
(Indication : on pourra exprimer $(a_1^2+u^2)(b_1^2+u^2)$ en fonction de a, b et v).

6. En utilisant la relation $I(a,b) = I(a_1,b_1)$, montrer avec soin que pour tous $a,b>0$ on a
$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}.$$

Cette formule est due à C.-F. Gauss. En utilisant des méthodes similaires à celles de la question 5, on peut démontrer que pour tous $a,b>0$ on a l'identité
$$2J(a_1,b_1) = J(a,b) + ab\,I(a,b).$$

Cette formule sera admise dans les questions suivantes.

7. Montrer que
$$2(J(a_1,b_1) - a_1^2 I(a,b)) = J(a,b) - a^2 I(a,b) + \frac{1}{2}\delta_0 I(a,b),$$
où pour tout $n \geqslant 0$, $\delta_n = a_n^2 - b_n^2$. En déduire que
$$2^n(J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n)) = J(a,b) - a^2 I(a,b) + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1}\delta_j I(a,b).$$

8. (a) Montrer à partir de la définition de $J(a,b)$ que la suite $(J(a_n,b_n))$ converge vers une limite ℓ quand $n\to\infty$ et donner une estimation de $|J(a_n,b_n) - \ell|$.

(b) En déduire que $2^n(J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n))$ tend vers 0 quand $n\to\infty$.

(c) Justifier la convergence de la série $\sum_{j\geqslant 0} 2^{j-1}\delta_j$ et conclure que
$$J(a,b) = I(a,b)\left(a^2 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j-1}\delta_j\right) = \frac{\pi}{2M(a,b)}\left(a^2 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j-1}\delta_j\right).$$

On obtient ainsi une façon efficace d'estimer numériquement les intégrales de la forme $J(a,b)$.

Partie 3 : Équation du pendule

Dans cette partie on s'intéresse à l'équation différentielle
$$\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0, \qquad \text{(P)}$$

où ω est un réel positif, dite *équation du pendule*. Physiquement, il s'agit de l'équation satisfaite par l'angle d'une masse ponctuelle attachée à un fil rigide, soumise uniquement à l'effet de la pesanteur. Dans ce cas on a $\omega^2 = g/\ell$ où g est l'accélération de la pesanteur et ℓ est la longueur du fil. (Aucune notion de physique ne sera considérée dans la suite.)

On dit que θ est solution de l'équation du pendule sur I si θ est une fonction de classe C^2 définie sur un intervalle I et satisfait

$$\theta''(t) + \omega^2 \sin(\theta(t)) = 0$$

pour tout t dans I. On admettra que pour tout $(t_0, \theta_0, \theta'_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution de l'équation du pendule définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\theta(t_0) = \theta_0$ et $\theta'(t_0) = \theta'_0$.

9. Déterminer la solution de l'équation différentielle linéarisée

$$\theta'' + \omega^2 \theta = 0$$

telle que $\theta(0) = 0$ et $\theta'(0) = \theta'_0$.

Dans la suite on s'intéresse à la solution θ de (P) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\theta(0) = 0$ et $\theta'(0) = \theta'_0$. On supposera également que $0 < (\theta'_0)^2 < 4\omega^2$.

10. Montrer que θ vérifie l'équation

$$(\theta')^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0), \tag{P'}$$

où $\theta_0 \in]0, \pi[$ est un réel que l'on précisera.

11. Réciproquement soit θ une solution de classe C^2 de (P') sur un intervalle ouvert I.

(a) Posons $Z = \{t \in I,\ \theta'(t) = 0\}$. Montrer que si $t_0 \in I$ est un point d'accumulation de Z (i.e. il existe une suite infinie (t_n) d'élements de Z telle que $t_n \to t_0$) alors $\theta''(t_0) = 0$.

(b) Montrer que si θ n'est pas constante alors θ satisfait (P). *(Indication : on pourra considérer un intervalle maximal $J \subset I$ où θ satisfait (P) et montrer par l'absurde que $J = I$.)*

12. Soit ϕ la fonction définie par

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{2\omega^2(\cos(s) - \cos(\theta_0))}}.$$

Montrer que ϕ réalise une bijection continue de $[0, \theta_0]$ sur un intervalle de la forme $[0, T_0]$, de classe C^2 sur $[0, \theta_0[$. Préciser T_0.

13. Soit ψ la bijection réciproque de ϕ. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $[0, T_0]$ et qu'elle satisfait l'équation (P').

14. On étend ψ à $[0, 2T_0]$ en posant $\psi(t) = \psi(2T_0 - t)$ pour $t \in [T_0, 2T_0]$. Montrer que cette extension est de classe C^1 (on admettra qu'elle est en fait de classe C^2). et que l'on obtient ainsi une solution de (P) sur $[0, 2T_0]$. Expliquer comment étendre cette solution en une solution $4T_0$-périodique de (P).

Partie 4 : Période du pendule et intégrales elliptiques

Dans cette partie on s'intéresse au nombre

$$T = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{ds}{\sqrt{2\omega^2(\cos(s) - \cos(\theta_0))}} .$$

15. Montrer que T peut s'écrire sous la forme

$$T = c \int_0^{\theta_0/2} \frac{dt}{\sqrt{k^2 - \sin^2 t}},$$

avec $k = \sin(\theta_0/2)$. Préciser la valeur de c.

16. En faisant un changement de variable de la forme $k \sin u = \sin t$, exprimer T en fonction de l'intégrale elliptique $I\left(1, \sqrt{1-k^2}\right)$.

17. Montrer que lorsque k tend vers 0 on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + o(k^2)\right).$$

En déduire la *formule de Borda* pour les petites valeurs de θ_0 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + o\left(\theta_0^2\right)\right).$$

⋆ ⋆ ⋆