CONCOURS D'ADMISSION 2021

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 1_Automne

Épreuve n°3

PHYSIQUE

Mardi 20 Octobre 2020 de 09h00 à 12h00

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le problème comporte 4 exercices indépendants portant sur des domaines différents de la physique dans lesquels on peut mettre en évidence des traitements analogues.

Formulaire et valeurs numériques de quelques constantes fondamentales :

Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}$ m.s^{-1}

Permittivité et perméabilité relative du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ USI et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ USI.

Constante de gravitation universelle : $G = 6.67\ 10^{-11}$ U.S.I.

Rayon terrestre : $R_T = 6400$ km

Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0\ 10^{24}$ kg

Conductivités thermiques :

- verre $\lambda_v = 1.6$ W·m^{-1}·K^{-1} ;
- air au repos : $\lambda_a = 0.03$ W·m^{-1}·K^{-1}.

Coefficients conducto-convectifs :

- pour un contact entre le verre et l'air d'un local fermé : $h_i = 9.1$ W·m^{-2}·K^{-1} ,
- pour un contact entre le verre et l'air extérieur : $h_e = 17$ W·m^{-2}·K^{-1}.

Opérateurs d'analyse vectorielle du premier ordre en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Opérateurs d'analyse vectorielle du second ordre (Laplaciens) :

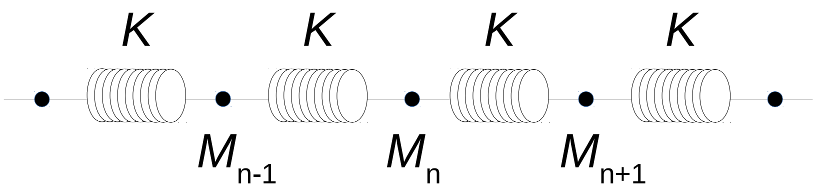
$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \Delta f$$
$$\vec{\Delta}\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})).$$

Exercice 1 : analogies électro-mécaniques

A. Oscillateurs mécaniques

On considère la chaîne d'oscillateurs couplés représentée sur la figure ci-après. Tous les points matériels M_n ont même masse m; à l'équilibre ils sont confondus avec les points A_n d'abscisse na où n est un entier quelconque et a une constante donnée; hors d'équilibre, ils sont susceptibles de se déplacer le long de Ox et on note leur abscisse : $\mathrm{x}_n(t) = na + u_n(t)$.

Chaque masse est reliée à ses deux voisines par des ressorts de même longueur à vide égale à a et de même raideur K. On ne tient pas compte de la pesanteur, u_n est assez petit pour qu'il n'y ait pas de choc entre deux points matériels M_n voisins.



1 – Établir l'équation différentielle du mouvement de M_n et la mettre sous la forme:

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}}{2} = 0.$$

Donner l'expression de ω_0 (en fonction de m et K) et sa dimension.

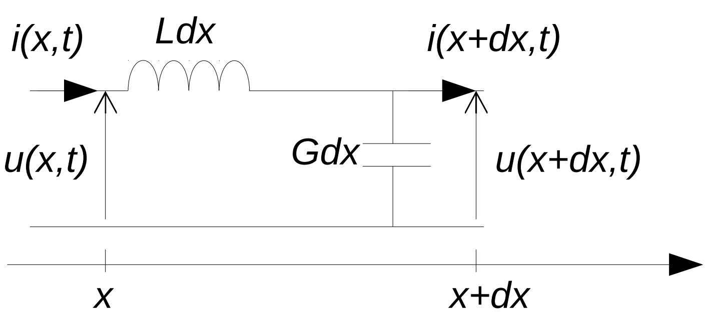
2 – La chaîne est infinie ($-\infty < n < \infty$). On fait l'approximation des milieux continus, c'est-à-dire qu'on définit une fonction $u(x,t)$ variant très peu à l'échelle de a et telle que $u_n(t) = u(x = na, t)$.

En faisant un développement de Taylor pour $u_{n+1}(t) - u_n(t) = u(x+a,t) - u(x,t)$ et pour

$u_{n-1}(t) - u_n(t) = u(x-a,t) - u(x,t)$, montrer que $u(x,t)$ est solution d'une équation de propagation de d'Alembert de la forme. On donnera l'expression de la célérité c de propagation en fonction de a et ω_0.

B. Ligne bifilaire

On considère une ligne bifilaire d'axe $x'x$. On modélise sur la figure suivante une tranche de ligne comprise entre les points d'abscisse x et $x + dx$. Le circuit comporte une inductance $L\,dx$ et une capacité $G\,dx$.



1 – On traite ce circuit dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires ($ARQS$). Définir.

2 – On introduit les courants $i(x,t)$ et $i(x+dx,t)$ et les tensions $v(x,t)$ et $v(x+dx,t)$. Établir deux équations couplées entre $\frac{\partial i}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ d'une part, puis $\frac{\partial i}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ d'autre part.

3 – En déduire que i et v sont solutions d'une équation de d'Alembert avec la célérité c. Donner la célérité c en fonction des paramètres du circuit.

4 – Montrer que pour des solutions de la forme $i = f(x-ct)$ et $v = g(x-ct)$, le rapport $\frac{v}{i}$ est une constante qu'on appelle impédance caractéristique Z_c de la ligne. On exprimera Z_c en fonction des paramètres du circuit.

Exercice 2 : étude d'un simple et double vitrage

Dans ce problème on étudie un système de vitrage séparant un intérieur à la température T_i = 20.0°C d'un extérieur à la température T_e = 5.0°C. On notera Ox l'axe perpendiculaire à la vitre, allant de l'intérieur vers l'extérieur. On se placera en régime stationnaire et en dimension unidimensionnelle paramétrée par x. On rappelle que la densité de flux de chaleur dans un matériau de **conductivité thermique** λ est liée au gradient de température par la loi de Fourier : $\vec{j} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$.

Les échanges thermiques à une interface air-verre sont modélisés par la loi de transfert conducto-convectif de Newton, qui donne le flux thermique à travers une surface S lorsqu'il y a une différence de température ΔT entre l'air et le verre : $\Phi_{th} = hS\Delta T$ où h est un coefficient, appelé **coefficient conducto-convectif**.

1 – Trouver un analogue électrique à la loi de Fourier donnée ci-dessus. On donnera les analogues de $\vec{j}$, λ et T.

2 – Un vitrage simple est constitué d'une plaque de verre de surface S et d'épaisseur e. Pour les applications numériques, on prendra : S = 1.0 m^2 et e = 4.0 mm. On note $T_{i,v}$ la température de la face intérieure du verre et $T_{e,v}$ la température de la face extérieure du verre.

En se basant sur l'analogie précédente, calculer le profil de température $T(x)$ dans le verre.

En déduire l'expression de la résistance thermique R_v de la plaque de verre d'épaisseur e et de surface S.

Faire l'application numérique.

3 – En tenant compte des couches conducto-convectives aux interfaces air-verre, montrer que l'on peut assimiler ces couches à une résistance thermique, que l'on exprimera en fonction du coefficient conducto-convectif de l'interface considérée et de la surface S.

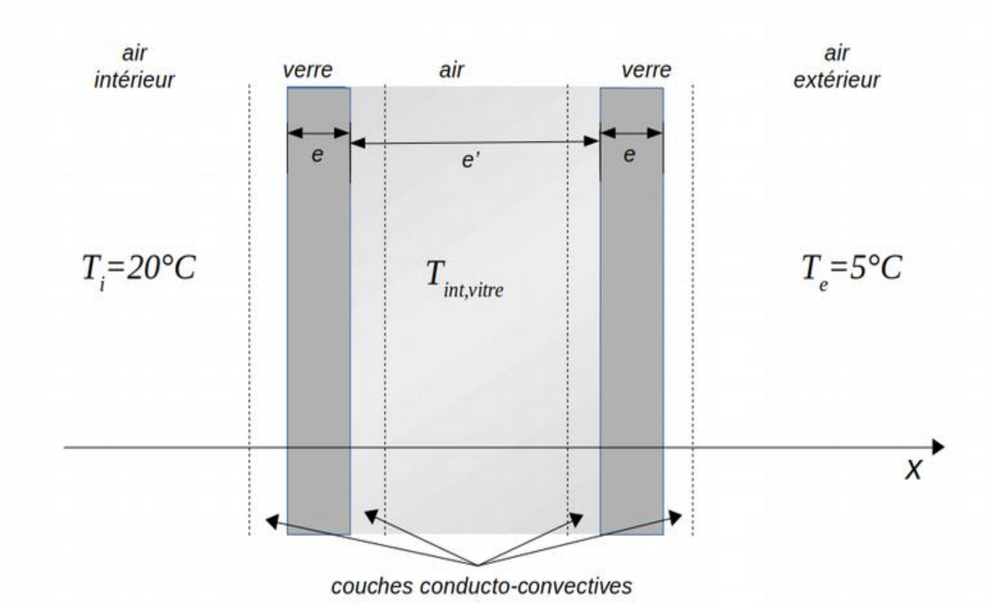
Faire l'application numérique.

4 – Donner l'expression de la résistance thermique totale de la vitre.

Faire l'application numérique.

Quel(s) terme(s) contribue(nt) le plus à l'isolation ?

5 – On considère maintenant un double vitrage du type « 4/16/4 », constitué d'une plaque de verre d'épaisseur e= 4.0 mm, d'un espace inter-plaque d'épaisseur e'= 16 mm, et d'une seconde plaque de verre d'épaisseur e (Figure ci-après). On considère toujours une surface de vitrage S = 1.0 m^2.



On suppose dans un premier temps que l'air entre les deux vitres est parfaitement immobile.

Quelle est alors l'expression de la résistance thermique de cette couche d'air ?

Faire l'application numérique.

Donner alors l'expression et la valeur de la résistance thermique totale du vitrage.

6 – L'air entre les deux vitres est en réalité mis en mouvement par la différence de température qui provoque des mouvements de convection. Le modèle précédent n'est plus valable si l'on tient compte de cette convection. On suppose maintenant que le profil de température est constant entre les deux vitres, de valeur $T_{int,vitre}$, sauf dans deux couches limites situées contre chacune des faces du verre (voir figure ci-dessus). On prendra la valeur de h_i pour le coefficient conducto-convectif associé à ces couches.

Pourquoi la résistance thermique associée à la portion d'air de température uniforme égale à $T_{int,vitre}$ est-elle nulle ?

7 – Donner alors l'expression de la résistance thermique totale du vitrage.

Faire l'application numérique.

8 – Donner l'expression de la température $T_{int,vitre}$.

Faire l'application numérique.

9 – Proposer un schéma électrique équivalent.

Exercice 3 : analogie classique d'un trou noir

Un trou noir est modélisé comme une distribution de masse à symétrie sphérique de masse totale M et de rayon R.

1 – Calculer le champ gravitationnel en tout point de l'espace. On pourra faire une analogie avec le cas de l'électrostatique.

2 – Montrer que l'énergie potentielle gravitationnelle de la distribution de masse du trou noir vaut :

$$E_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\,.$$

Faire l'analyse dimensionnelle de cette expression.

3 – On définit la vitesse de libération d'un corps placé dans le champ gravitationnel d'un objet massif comme la vitesse minimale qu'il faut lui communiquer pour qu'il puisse décoller et « échapper » à l'effet de la gravitation de l'objet en question. Montrer que pour une fusée lancée à partir de l'équateur terrestre, cette vitesse vaut 11,2 km · s^{-1}.

4 – Montrer que l'on peut définir « l'horizon du trou noir » comme le rayon de l'objet massif pour lequel cette vitesse de libération égale la vitesse de la lumière dans le vide.

Donner son expression en fonction de la constante de gravitation universelle G, de la masse du trou noir M et de la vitesse de la lumière dans le vide c.

Exercice 4 : dépasser la barrière de l'optique géométrique

On éclaire par un faisceau lumineux monochromatique, parallèle à l'axe optique Oz, le plan Π (Oxy) percé d'une ouverture de forme quelconque agissant comme un diaphragme pour l'éclairement incident. On mesure l'éclairement obtenu dans le plan Π' $(O'XY)$ placé au foyer image d'une lentille de focale f'.

1 – Rappeler la forme intégrale du principe de Huygens-Fresnel.

Faire un dessin expliquant toutes les notations utilisées.

2 – On considère dans cette question que l'objet diffractant est une fente F rectangulaire de centre O et de largeur b suivant Ox, et de grande dimension H suivant l'axe perpendiculaire Oy.

Rappeler l'approximation dans laquelle on se place pour simplifier le principe de Huygens-Fresnel.

Calculer l'intensité mesurée dans le plan Π' $(O'XY)$.

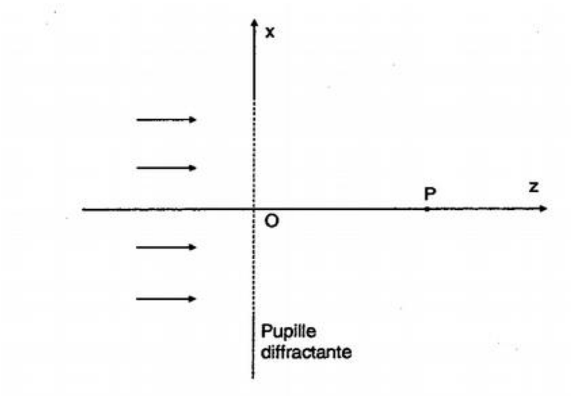
Tracer la courbe correspondante.

3 – On considère dans cette question que l'objet diffractant est une fente F' rectangulaire de centre O et de largeur b suivant Ox, et de longueur a suivant l'axe perpendiculaire Oy.

On se place dans le même cadre d'approximation qu'à la question précédente.

Calculer l'intensité mesurée dans le plan Π' $(O'XY)$.

Dans la suite du problème, on retire la lentille de projection du dispositif et on s'intéresse à l'éclairement en un point P de l'axe optique, situé à une distance z finie du centre O $(z > 0)$, voir schéma du dispositif ci-contre. L'objet diffractant est toujours éclairé, en incidence normale, par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ.



On suppose que l'objet diffractant est un diaphragme circulaire de centre *O* et de rayon *R*, caractérisé par un facteur de transparence en amplitude :

$$t(x,y) = \exp\left[j\left(\frac{x^2+y^2}{\alpha}\right)\right]$$

avec $\alpha > 0$ *et* $j^2 = -1$.

4 – Justifier que l'amplitude au point P s'écrit :

$$a(P) = K\int_{\text{pupille}} t(x,y)\frac{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}MP}}{MP}dxdy$$

où $M(x,y)$ est un point courant de la pupille.

Donner la dimension du paramètre K.

5 – Simplifier l'expression précédente en supposant que : $R \ll z$, $R \ll \alpha$ et $\alpha\lambda \ll R^2$.

6 – Montrer que l'intensité lumineuse mesurée s'exprime sous la forme :

$$I(P) = C \ \mathrm{sinc}^2 \left(\frac{\pi R^2}{\lambda} (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2z}) \right).$$

Donner l'expression de la constante C en fonction des autres paramètres du problème.

7 – Tracer l'intensité lumineuse en fonction de $1/z$ et caractériser la figure ainsi obtenue (amplitude, présence de minima/maxima etc).

8 – Justifier que les propriétés précédentes sont équivalentes à celles d'une lentille convergente.

Donner la distance focale image de la lentille équivalente en fonction de α.