CONCOURS D'ADMISSION 2021

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Ce problème porte sur l'analyse de Fourier, dans un cadre discret, puis continu. La partie 1 est indépendante des parties 2 et 3.

Partie 1 : Transformée de Fourier discrète

On fixe un entier $N \geqslant 1$. Pour un vecteur de nombres complexes $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, on pose pour tout $0 \leqslant k \leqslant N-1$

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}nk} \quad (\text{où } \mathrm{i}^2 = -1)$$

et on définit $\mathcal{D}(x) = (y_0, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ la transformée de Fourier discrète de x. Pour simplifier les notations on posera $\zeta = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}}$.

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est une matrice à coefficients complexes, on note $A^* = \overline{A}^\top$ la transposée de la conjuguée de A. On rappelle que si $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^N$ est une suite de N nombres complexes, la matrice de Vandermonde $V(\alpha)$ est définie par $V(\alpha) = (\alpha_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ et

$$\det(V(\alpha)) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (\alpha_j - \alpha_i).$$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est une transformation linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans lui même, et exprimer sa matrice dans la base canonique, qui sera notée U.

2. Un entier $q \geqslant 0$ étant fixé, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \zeta^{nq}$ en fonction de q.

3. Calculer U^*U. En déduire que $\mathcal{D}$ est inversible et donner l'expression de $\mathcal{D}^{-1}$.

4. Calculer $\mathcal{D}^2$ puis $\mathcal{D}^4$. En déduire que U est diagonalisable et que ses valeurs propres appartiennent à l'ensemble $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

Dans toute la suite de cette partie nous supposerons que N est **impair** et notre objectif est de déterminer la dimension des espaces propres de U. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on note $m_\alpha = \dim(\ker(U - \alpha I_N))$.

5. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{0 \leqslant \ell < k \leqslant N-1} (k + \ell) = \frac{N(N-1)^2}{2}$.

(b) Montrer que $\displaystyle\det(U) = N^{-\frac{N}{2}} \mathrm{i}^{\frac{N(N-1)}{2}} (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{0 \leqslant \ell < k \leqslant N-1} \left(2 \sin \frac{\pi(k-\ell)}{N} \right)$.

6. On pose $S = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{N-1} \zeta^{\ell^2}$. Montrer que $|S| = \sqrt{N}$.

7. En déduire que :

$$(m_1 - m_{-1})^2 + (m_{\mathrm{i}} - m_{-\mathrm{i}})^2 = 1$$

et qu'il existe des nombres $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ et $\eta \in \{1, \mathrm{i}\}$ tels que $S = \varepsilon \eta \sqrt{N}$.

8. En considérant la matrice U^2, montrer que

$$m_1 + m_{-1} - m_{\mathrm{i}} - m_{-\mathrm{i}} = 1.$$

9. Montrer que :

— si $N \equiv 1\,[4]$ alors $\eta = 1$;

— si $N \equiv 3\,[4]$ alors $\eta = \mathrm{i}$.

10. Montrer que $\det(U) = \mathrm{i}^{\frac{N(N-1)}{2}}\varepsilon$ et en déduire la valeur de ε en fonction de N.

11. Conclure que, en posant $M = \lfloor N/4 \rfloor$, on a

$$\begin{cases} m_1 = M+1 \text{ et } m_{-1} = m_{\mathrm{i}} = m_{-\mathrm{i}} = M \text{ si } N \equiv 1\,[4], \\ m_1 = m_{-1} = m_{-\mathrm{i}} = M+1 \text{ et } m_{\mathrm{i}} = M \text{ si } N \equiv 3\,[4]. \end{cases}$$

Note : la somme S a été introduite et longuement étudiée par Gauss, qui en a déterminé la valeur.

Partie 2 : Transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$.

On introduit l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha u^{(\beta)}(x) \right| < \infty \right\}.$$

Si u est une fonction de $\mathcal{S}$ on définit sa *transformée de Fourier*, notée $\mathcal{F}u$ ou $\widehat{u}$ (ou parfois abusivement $\widehat{u(x)}$ ou $\mathcal{F}(u(x))$) par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \widehat{u}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-2\mathrm{i}\pi xy} dx.$$

On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

On pourra librement utiliser la version suivante du théorème de Fubini : *soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est une fonction continue telle qu'il existe des fonctions continues et intégrables φ et ψ sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on ait $|f(x,y)| \leqslant \varphi(x)\psi(y)$, alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \right) dy.$$

12. Montrer que si u est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{u}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et uniformément bornée.

13. Montrer que pour $u \in \mathcal{S}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $\widehat{u}$ est de classe C^α et

$$\widehat{u}^{(\alpha)} = \mathcal{F}\left((-2\mathrm{i}\pi x)^\alpha u(x) \right).$$

14. Montrer que si $u \in \mathcal{S}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{F}\left(u^{(\alpha)}\right)$ est bien définie et

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \widehat{u^{(\alpha)}}(y) = (2\mathrm{i}\pi y)^\alpha \widehat{u}(y).$$

15. Déduire des questions précédentes que si $u \in \mathcal{S}$ alors $\widehat{u} \in \mathcal{S}$.

16. Montrer que la fonction $w : x \mapsto e^{-\pi x^2}$ appartient à $\mathcal{S}$ et que $\widehat{w} = w$.

(indication : on pourra calculer $\left(\dfrac{\widehat{w}}{w}\right)'$)

17. Démontrer que pour tous $u, v \in \mathcal{S}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(y)v(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\widehat{v}(y)dy$$

(on justifiera que ces intégrales sont bien définies).

18. Pour $u \in \mathcal{S}$, montrer la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(y)e^{-\pi t^2 y^2} e^{-2\mathrm{i}\pi xy}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(ty - x)e^{-\pi y^2}dy.$$

19. En déduire que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(u)(x) = u(-x)$. Conclure que $\mathcal{F}$ réalise une bijection de $\mathcal{S}$ dans lui même et exprimer son inverse.

Partie 3 : Théorème de De Moivre-Laplace.

On admettra qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées dans la suite sont définies, et on notera $\mathbb{E}(\cdot)$ l'espérance d'une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs réelles ou complexes.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, avec $0 < p < 1$. Pour $n \geqslant 1$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } S_n^\star = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(S_n - np).$$

20. Calculer l'espérance et la variance de S_n.

21. Si z est un nombre **complexe**, montrer que $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ tend vers e^z quand $n \to \infty$.

(indication : on pourra montrer l'inégalité $\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$)

22. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left(e^{-2\mathrm{i}\pi t S_n^\star}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-2\pi^2 t^2}.$$

23. En utilisant les résultats de la partie 2, conclure que si φ est une fonction de $\mathcal{S}$, on a

$$\mathbb{E}\left(\varphi(S_n^\star)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-t^2/2}dt.$$

◇ ◇ ◇