CONCOURS D'ADMISSION 2021

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°3

PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

QUELQUES BARRIERES A FRANCHIR…

Le problème s'intéresse à diverses situations physiques dans lesquelles un système doit franchir un obstacle modélisable en général par une barrière de potentiel. On cherche alors à définir des coefficients de « transmission » et de « réflexion » et à en déterminer l'expression en fonction des paramètres du problème.

Le problème comporte 3 exercices indépendants portant sur 3 domaines différents de la physique : électromagnétisme, thermodynamique et mécanique quantique.

Valeurs numériques de quelques constantes fondamentales :

Charge élémentaire : e = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C

Célérité de la lumière dans le vide : c = $3{,}0 \cdot 10^{8}$ m.s^{-1}

Permittivité et perméabilité relative du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ USI et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ USI.

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,3806485210^{-23}$ USI.

Formulaire :

Dérivée partielle : on considère une fonction de plusieurs variables $f(x,y)$ et on rappelle que la dérivée partielle**,** par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$, de cette fonction est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, ici x, les autres étant gardées constantes.

Exemple :$f(x,y) = x^2\cos(3y) \longrightarrow \partial f/\partial x = 2x\cos(3y)$ et $\partial f/\partial y = -3x^2\sin(3y)$.

Opérateurs d'analyse vectorielle du premier ordre en coordonnées cartésiennes :

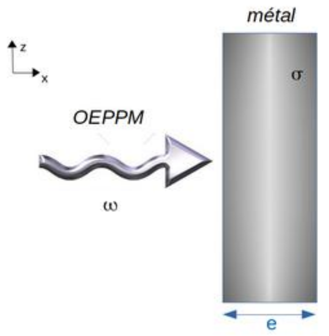
$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$\text{div}(\overrightarrow{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Opérateurs d'analyse vectorielle du second ordre (Laplaciens) :

- Laplacien d'un champ scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- Expression analytique du Laplacien scalaire de $f(r)$ en coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf)$
- Laplacien d'un champ vectoriel : $\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V})$

Exercice 1 : transmission d'une lame mince

On considère une lame métallique, d'épaisseur e dans la direction Ox, de conductivité électrique σ éclairée en incidence normale par une onde électromagnétique plane progressive monochromatique (OEPPM) de pulsation ω. Cette lame est placée dans un milieu qui sera assimilé au vide pour ses propriétés diélectrique et magnétique. Ses dimensions transversales suivant les directions Oy et Oz peuvent être considérées comme infinies si besoin.



L'axe horizontal est divisé en 3 régions distinctes :

① : $x < 0$
② : $0 < x < e$
③ : $x > e$

Pour les applications numériques et le calcul d'ordres de grandeur, on prendra les valeurs suivantes :

λ = 10 µm, e = 20 nm, σ = 4, 5 · 10^7 S · m^{-1} (cas de l'or).

1 – Écrire le champ électrique de l'OEPPM étudiée ci-dessus en considérant que la polarisation est rectiligne.

On introduira le vecteur d'onde $\vec{k}$.

A quel domaine spectral appartient cette OEPPM ?

2 – Montrer la variation temporelle de la densité volumique de charges interne au métal suit une loi exponentielle dont on déterminera la constante de temps en fonction de la permittivité relative du vide ϵ_0 et de σ.

Faire l'application numérique.

En déduire que le métal peut-être considéré comme électriquement neutre.

3 – Établir que le champ électrique obéit à une équation de propagation du type :

$$\Delta\vec{E} - \alpha\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \beta\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Exprimer les constantes α et β en fonction des données du problème.

4 – En déduire la relation de dispersion entre le module du vecteur d'onde k et la pulsation ω.

Simplifier cette relation en tenant compte des valeurs numériques particulières considérées dans ce problème.

En déduire que le vecteur d'onde peut se mettre sous la forme :

$$k = \pm(1 + j) \times \frac{1}{\delta}$$

où $j^2 = -1$ et δ est un paramètre à exprimer en fonction de μ_0 la perméabilité relative du vide, σ et ω.

Faire l'application numérique. Commenter.

5 – Justifier que l'on écrive le champ électrique dans la région ① sous la forme :

$$E(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{i(kx+\omega t)}$$

où A et B sont des constantes.

6 – Donner l'expression du champ électrique les régions ② et ③ en introduisant les constantes C, D, E, F.

Justifier que l'on puisse annuler l'un de ces constantes et préciser laquelle.

7 – Donner l'expression du champ magnétique dans les 3 régions ①, ② et ③.

8 – On rappelle les conditions de passage entre deux milieux 1 et 2 pour une onde électromagnétique :

$$\begin{array}{l} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}\vec{n} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \end{array}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire, normal à la surface, dirigé de 1 vers 2, σ_s la densité surfacique de charge

à l'interface, et $\vec{j}_s$ le vecteur densité de courant surfacique à l'interface.

On définit le coefficient de transmission $T(\omega)$ comme le module au carré du rapport entre l'amplitude du champ électrique transmis dans la région ③ et l'amplitude du champ électrique incident de la région ①.

Justifier et donner l'expression littérale de T en fonction des constantes pertinentes parmi A, B, C, D, E et F.

9 – Calculer le coefficient de transmission $T(\omega)$, et montrer que son expression se simplifie en :

$$T(\omega) \simeq \gamma e^{-2e/\delta}$$

dans la limite où $k\delta \ll 1$ et $e \ll \delta$.

Donner l'expression de la constante γ.

Étudier qualitativement le comportement du coefficient $T(\omega)$ en fonction des différents paramètres dont il dépend.

Exercice 2 : écrantage de Debye

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, partiellement ou totalement ionisés. Naturels ou artificiels, on les rencontre sous de nombreuses formes, l'un des exemples les plus connus étant l'ionosphère.

Dans un modèle simple, un plasma homogène d'argon contient, en moyenne et par unité de volume, n_e électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, et $n_\mathrm{i} = n_\mathrm{e}$ ions Ar^+ de masse m_i et de charge $+e$. Le plasma est supposé en équilibre thermodynamique et on note T sa température.

Soit un ion argon Ar^+ en particulier, placé en O, et pris comme origine. Du fait de l'attraction coulombienne, on observe au voisinage de cet ion un surplus de charge négative, responsable d'un écart local d'électroneutralité globale du plasma. Le milieu est donc localement non-homogène. Soit $V(r)$ le potentiel qui règne en un point M situé à la distance r de l'ion Ar^+. L'origine des potentiels est prise à l'infini.

Les densités volumiques d'ions $n_+(r)$et d'électrons $n_-(r)$ en M sont données par la loi de Boltzmann :

$$n_+ = n_\mathrm{e}\, e^{-\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}} \qquad \text{et} \qquad n_- = n_\mathrm{e}\, e^{\frac{eV(r)}{k_\mathrm{B}T}}$$

1 – Commenter les expressions précédentes.

2 – Donner l'expression de la densité volumique totale de charges $\rho(r)$ pour $r \neq 0$.

3 – Déterminer la forme générale de l'équation différentielle satisfaite par $V(r)$ en fonction de $\rho(r)$. Comment nomme-t-on cette équation ?

4 – On se place dorénavant dans l'hypothèse où $eV(r) \ll k_B T$. Simplifier l'équation obtenue à la question précédente et trouver une équation différentielle en $u(r) = rV(r)$.

5 – Résoudre l'équation différentielle et justifier que la solution se mette sous la forme : $u(r) = Ae^{-\alpha r} + Be^{-\beta r}$.

6 – On admet que $V(\infty) = 0$ et qu'au voisinage de l'ion Ar^+, l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. Déterminer les constantes d'intégration A, B, α et β.

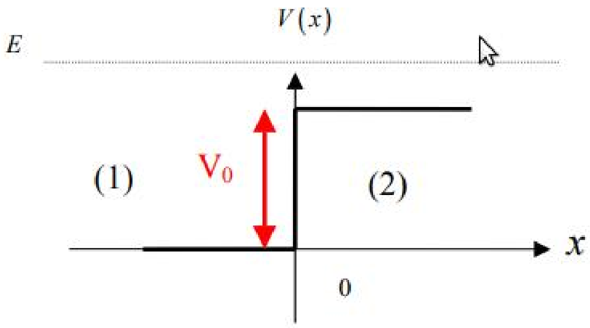
7 – Donner l'expression du potentiel $V(r)$ en fonction de e, ϵ_0, r et d'une distance caractéristique λ_D appelé **longueur de Debye**, à expliciter en fonction de ϵ_0, k_B, T, n_e et e.

8 – Commenter le résultat obtenu et interpréter λ_D.

9 – Application numérique. Pour ce plasma d'argon, $n_e = 3.0\ 10^{21}$ m^{-3}. Calculer la valeur numérique de λ_D pour des températures de 1000 K et 10000 K.

Exercice 3 : électron dans un potentiel périodique

On considère dans un premier temps un électron de masse m décrit par une fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger (on ne tient pas compte de son spin ni d'effets relativistes). On se place dans le cadre d'un problème unidimensionnel dans lequel l'électron est incident sur une marche de potentiel stationnaire, de hauteur V_0, décrite sur la figure ci-après où l'on a considéré le cas particulier où l'énergie E de l'électron est telle que : $E > V_0$.



1 – Montrer que la fonction d'onde dans la région (1) dépend de 2 constantes que l'on notera A_1 et B_1 et que la fonction d'onde dans la région (2) dépend de 2 constantes A_2 et B_2 dont l'une peut-être considérée comme nulle si l'on suppose qu'il n'y a pas d'onde régressive retour.

2 – Dans le cas où $E > V_0$ définir et exprimer les coefficients de réflexion R et de transmission T en fonction des paramètres : $\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $\beta = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$.

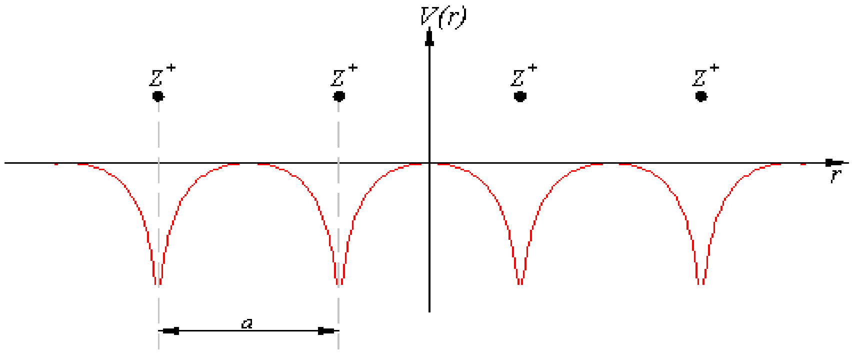
3 – On reste dans l'hypothèse où $E > V_0$. Que vaudraient R et T si l'électron était une particule classique ?

4 – On se replace dans le cadre de la mécanique quantique et on envisage cette fois le cas où $E < V_0$.

Que valent les facteurs R et T ?

Commenter.

5 – Dans la suite de ce problème, on étudie un modèle de matériaux solides unidimensionnel présentant un réseau cristallin périodique. Pour simplifier le problème, on se place dans un réseau à une dimension constitué par les cations du matériau, régulièrement espacés d'une distance a, paramètre du réseau. Le potentiel du réseau ressemble donc à une fonction périodique de période a représentée sur la figure ci-après.



La résolution de ce type de problème fait appel au théorème de Bloch dont l'énoncé est donné ci-dessous.

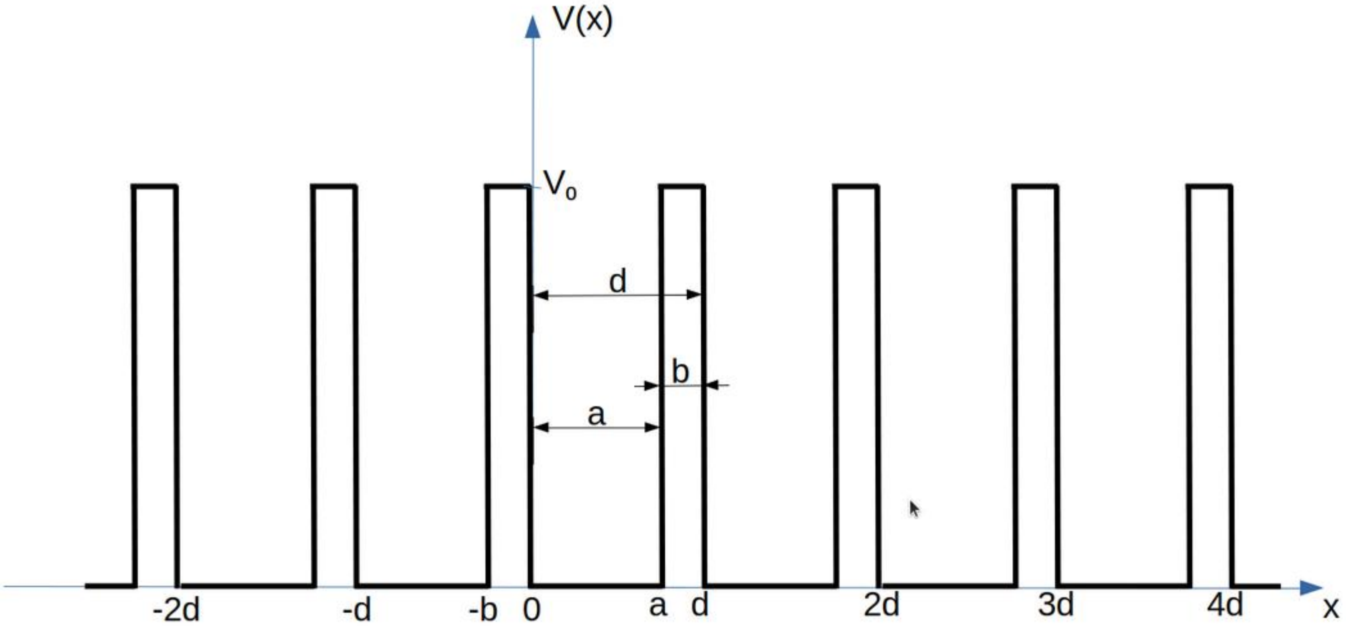
Soit $V(x)$ un potentiel de périodicité a, c'est-à-dire tel que $V(x + a) = V(x)$. Alors, il existe une base de solution de l'équation de Schrödinger de la forme : $\psi(x) = e^{ikx} \cdot u_{\vec{k}}(x)$ où $u_{\vec{k}}(x)$ est une fonction de période

a, c'est-à-dire $u_{\vec{k}}(x+a) = u_{\vec{k}}(x)$et l'indice $\vec{k}$ permet de différencier les différents états propres correspondants à une même énergie E_k. Ces fonctions d'onde sont appelées les fonctions d'onde de Bloch.

Pour éviter les problèmes de bord, on considère que le réseau est périodique aux limites c'est-à-dire qu'on considère qu'il forme une chaîne qui se boucle sur elle-même. Si L est la longueur du réseau, N le nombre d'ions du réseau, avec $L = Na \gg a$, on peut donc considérer que : $\psi(0) = \psi(L)$.

Montrer à partir du théorème de Bloch que k est nécessairement un multiple de $\frac{2\pi}{L}$.

6 – On se place dans la suite du problème dans le cadre du modèle de Kronig-Penney, dans lequel le système précédent est ramené à une infinité de puits quantiques, de même taille *a*, séparés par des barrières de potentiel rectangulaires de largeur *b* et de hauteur V_0. Chaque ensemble « puits+barrière » a une longueur d telle que $d = a + b$.



Justifier que l'on écrive la fonction d'onde solution sous la forme :

- $\psi(x) = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x}$ pour $0 \leq x \leq a$ et
- $\psi(x) = A_2 e^{i\beta x} + B_2 e^{-i\beta x}$ pour $-b \leq x \leq 0$

en reprenant les notations de la question 2 –.

7 – A partir du théorème de Bloch, exprimer la fonction d'onde pour $a \leq x \leq d$.

8 – Appliquer les conditions de continuité aux limites $x = 0$ et $x = a$.

9 – Montrer que le système obtenu n'admet des solutions que si la relation suivante est satisfaite :

$$\cos(kd) = \cos(\alpha a)\cos(\beta b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta}\sin(\alpha a)\sin(\beta b).$$

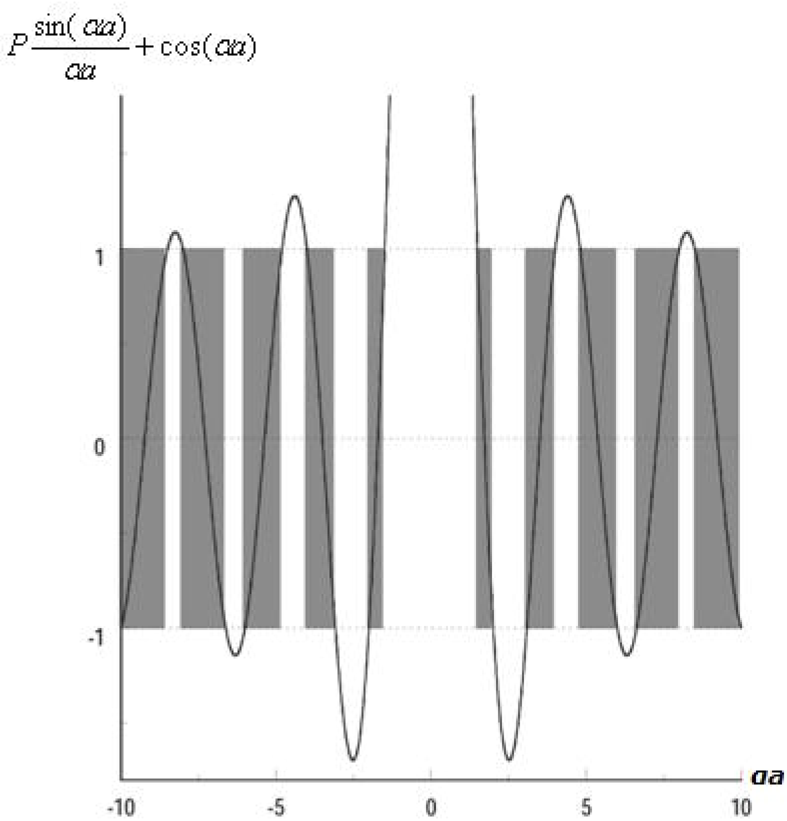
10 – On utilise souvent la limite de barrière infiniment haute ($V_0 \to \infty$) et infiniment fine ($b \to 0$), dont la « force », proportionnelle au produit $b \times \beta^2$, reste constante et finie. Dans cette limite on montre que la relation précédente se ramène à :

$$\cos(kd) = \cos(\alpha a) + P\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}$$

où P est une constante.

Déduire de la relation précédente qu'il existe des conditions de quantification de l'énergie de l'électron qui prennent la forme de « bandes d'énergie permises » et de « bandes d'énergie interdites ».

11 – On peut illustrer le résultat de la question précédente à l'aide d'une solution graphique, illustrée sur la figure ci-dessous.



Commenter.