ECOLE POLYTECHNIQUE CONCOURS D'ADMISSION 2021

Épreuves orales de Mathématiques 1 et 2, Filière MP

Les paragraphes suivants rassemblent les impressions perçues par les examinateurs de mathématiques les oraux de l'édition 2021 du concours.

Les examinateurs espèrent que les candidats malheureux de cette année trouveront dans ce rapport un début d'explication pour leur échec et que sa lecture permettra aux candidats du concours de 2022 d'aborder les oraux dans de bonnes conditions.

Après une session 2020 avec de nombreuses particularités décrites dans le précédent rapport, nous avons retrouvé pour cette session 2021 une organisation très proche de la session 2019.

Commençons par la répartition des notes, par commissions :

Nombre de candidats	1ère com.	2ème com.	3ème com.
Maths 1	130	130	128
Maths 2	130	130	128

Moyenne	1ère com.	2ème com.	3ème com.
Maths 1	11,86	11,97	11,78
Maths 2	11,63	11,35	11,69

Ecart-Type	1ère com.	2ème com.	3ème com.
Maths 1	3,10	3,09	3,16
Maths 2	3,46	3,36	3,31

Depuis la session 2015, les nouveaux programmes sont appliqués lors des oraux du concours. Il est important de rappeler que l'épreuve orale porte sur l'ensemble du programme, y compris la théorie des probabilités. Bien évidemment les exercices sont minutieusement conçus pour que seuls les théorèmes du programme suffisent à leur résolution.

L'oral de mathématiques doit permettre à l'examinateur d'évaluer la compréhension qu'a le candidat des concepts et méthodes fondamentaux du programme de mathématiques.

Pendant l'interrogation, l'autonomie du candidat est particulièrement importante. L'examinateur apprécie la capacité de ce dernier à aller de l'avant, ainsi que son aptitude à imaginer des stratégies et à faire preuve d'agilité technique. Les candidats doivent prendre l'initiative, proposer un plan d'attaque ou, si le problème semble difficile, tester l'énoncé sur des cas particuliers et éventuellement dessiner des figures pour donner forme à leur intuition, ce qui peut s'avérer utile même hors du cas évident d'un problème de géométrie. Face à un exercice difficile, le candidat est censé réagir de façon cohérente et intelligente en s'inspirant des situations plus communes qu'il a déjà rencontrées, ou de cas particuliers intéressants plus accessibles. L'examinateur peut alors choisir de le laisser développer une stratégie de résolution (si tant est qu'elle soit bien mise en œuvre, quand bien même celle-la ne serait pas la plus efficace), ou au contraire l'aiguiller vers des arguments plus adaptés, dont le développement peut se révéler plus gratifiant.

Un candidat doit donner des réponses claires et directes aux questions posées. Une bonne formulation doit conjuguer clarté, concision et précision. Le candidat doit structurer sa réflexion et formuler avec précision des arguments complets. Il vaut mieux, avant de s'exprimer, faire une courte pause pour rassembler ses idées. Par ailleurs, il faut prendre le temps de la réflexion et ne pas se lancer dans des calculs sans objet.

Mentionnons encore une tendance récente qui nuit au déroulement de la pensée mathématique et à la discussion avec l'examinateur : certains candidats rechignent à écrire des propriétés mathématiques précises au tableau, et parfois même se contentent d'un bavardage en guise de démonstration. Une variante de ce phénomène est la réticence à calculer. Il est tout à l'honneur d'un candidat de réfléchir si un argument abstrait permet de court-circuiter un calcul, mais on s'attend aussi à ce que le candidat sache juger de la pertinence de cette réflexion.

Lorsque l'examinateur dicte l'énoncé de l'exercice, le candidat ne doit pas essayer de le reformuler ou d'utiliser abusivement des abréviations : ceci mène le plus souvent le candidat à écrire une question qui n'est pas celle qui lui a été posée. Le candidat doit écrire au tableau l'énoncé dans les termes exacts dictés par l'examinateur. Ceux-ci ont toujours été choisis par les examinateurs avec soin et précision.

Si les fautes d'orthographe et de grammaire lors de la dictée du ou des exercices ne sont pas prises en compte dans l'évaluation des candidats, elles devraient néanmoins être évitées. Dans le même ordre d'idée, le jury déplore également la méconnaissance de l'alphabet grec par de nombreux candidats. On ne demande évidemment pas aux candidats de lire Homère ou Sophocle dans le texte, mais simplement de savoir distinguer φ et ψ, ou η et ζ. La connaissance des lettres grecques est en effet indispensable pour lire la plupart des textes mathématiques.

Arrive aussi que l'examinateur demande qu'un argument soit clarifié, sans pour autant que la stratégie du candidat soit remise en cause : certains candidats surréagissent à ces observations alors que l'examinateur ne voulait pas nécessairement infléchir le cours de leur réflexion.

Venons-en enfin aux mathématiques elles-mêmes. Nous avons constaté les manques suivants chez de nombreux candidats :

- *Cours* Le jury a été surpris que l'expression des matrices de $O_2(R)$ et l'interprétation géométrique de celles-ci posent problème à un grand nombre de candidats. Les examinateurs ont noté des manquements sur des points fondamentaux du cours de certains candidats : le théorème des accroissements finis, la convergence uniforme, le théorème de Bienaymé-Tchebychev, la manipulation de valeurs absolues... Toute partie du programme peut faire l'objet d'un exercice : le programme de première année, la théorie des probabilités, les fonctions de plusieurs variables...
- *Dessins* La réticence des candidats à faire le moindre dessin est préoccupante...
- *Savoir-faire* Les sommes des n premiers entiers et des n premiers carrés doivent être connues sans hésitation. Connaître les démonstrations n'est pas superflu. Les examinateurs attendent que les candidats soient capable de représenter graphiquement une fonction simple, de trouver un équivalent de $\arctan(x) - \pi/2$ en $+\infty$... on attend aussi que les candidats puissent, avec des indications, reconnaître une matrice de permutation, mettre en oeuvre une extraction diagonale pour des suites...
- *Abréviations.* Des candidats utilisent des abréviations au tableau, qui conduisent parfois

à des confusions. Par exemple est-ce que v.p. signifie valeur propre ou vecteur propre ?

- *Problèmes de logique.* Il est fâcheux de rencontrer des candidats ne sachant pas exprimer la négation d'une proposition mathématique. Par exemple, le fait qu'une fonction ne tend pas vers 0 à l'infini, ne signifie pas qu'elle admet une limite non nulle à l'infini. Plusieurs candidats utilisent encore l'ancienne terminologie « analyse/synthèse » et s'y rattachent comme à une bouée de sauvetage, sans pour autant que cela les aide à résoudre le problème posé. Ils prononcent ces mots comme s'ils avaient eu une idée et ceci ne manque pas de laisser les examinateurs perplexes... L'usage de cette terminologie induit d'ailleurs parfois les candidats à commettre des erreurs de logique élémentaire.
- Le jury a remarqué que de nombreux candidats avaient du mal à effectuer des calculs de plusieurs lignes au tableau sans erreur. On aimerait que les candidats fassent appel à leur intuition pour détecter d'éventuelles erreurs de calculs. Bien que l'on ne s'attende pas à ce que les candidats soient des virtuoses du calcul, on aimerait qu'ils montrent une certaine familiarité avec des opérations élémentaires et sachent par exemple sans erreur
  — faire des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice, et en connaître l'interprétation matricielle ;
  — déterminer la dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire élémentaire ;
  — déterminer la composée de deux symétries orthogonales du plan ;
  — les méthodes classiques pour le calcul de sommes trigonométriques (passage en complexe, arc moitié, ...) ne semblent pas connues par un certain nombre de candidats, y compris de bons candidats.

On trouve cependant de très bons candidats échappant à toutes ces critiques. Certains montrent même un enthousiasme rafraîchissant pour ce beau sujet qu'est la mathématique et interagissent de manière constructive avec les examinateurs. Nous espérons que ces quelques conseils (auxquels pourront s'ajouter ceux contenus dans les rapports des années précédentes) permettront d'en augmenter le nombre.

Pour conclure, nous proposons ci-dessous un exemple d'exercice posé lors de la session 2021, accompagné d'éléments de correction et de commentaires.

Énoncé

Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur $[0,1]$. On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in E$, on ait

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leqslant C\left(\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.

Commentaires

L'énoncé est assez bref et ne donne pas d'indication d'une méthode à suivre. Le jury ne s'attend évidemment pas à une résolution instantanée d'un tel exercice, ni à la connaissance d'une quelconque "astuce" permettant de le traiter — ce n'est d'ailleurs jamais le cas. De manière générale, si le but est bien de résoudre l'exercice posé, l'énoncé donne aussi la matière d'une discussion potentielle avec les candidats, qui ne doivent pas oublier que l'examinateur est capable d'apprécier ses connaissances, sa maîtrise des notions, son aisance conceptuelle et technique, indépendamment du fait que la question initiale ait été résolue ou non.

Faisons à ce sujet une mise en garde : s'il est possible de bien réussir une épreuve sans résoudre complètement l'exercice posé, pourvu qu'une discussion mathématique de qualité ait pu être nouée avec l'examinateur, les candidats ne doivent pas penser qu'un flot d'"idées" stéréotypées puisse remplacer une réflexion sérieuse sur le problème considéré, et ne doivent pas oublier que le jury est capable de distinguer les unes des autres. Pour donner un exemple, commencer l'épreuve en disant "La première idée qui me vient est de procéder par analyse–synthèse...", ou "J'aurais envie de supposer que C est entier et de procéder par récurrence sur C..." ne constitue pas dans le cas de cet exercice un début particulièrement engageant, et indique plutôt que les candidats parlent au lieu de réfléchir.

Face à l'exercice proposé ci-dessus, comme face à la plupart de ceux qui sont posés par le jury, il semble naturel que les candidats doivent prendre connaissance du problème et examiner les éléments qui sont à sa disposition. Il est donc parfaitement possible qu'une interrogation commence par quelques minutes de silence.

Sans proposer immédiatement une solution, les candidats peuvent [1] commencer par remarquer, par exemple, que le supremum et l'intégrale qui apparaissent dans l'énoncé existent en vertu de la continuité de f sur le compact $[0,1]$, que le supremum est la norme uniforme de f, et la racine carrée de l'intégrale une autre norme de f, associée au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$. L'hypothèse peut donc être réécrite sous la forme

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2.$$

On peut remarquer qu'on a également, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, l'inégalité

$$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty.$$

Sous les hypothèses de l'énoncé, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont donc équivalentes sur E, ce qui n'est pas étonnant si E est bien de dimension finie comme on cherche à le démontrer.

Ces remarques ne sont pas à strictement parler nécessaires à la résolution de l'exercice, mais elles permettent de jalonner le champ mathématique dans lequel la réflexion va se situer.

Un problème qui se pose de manière générale, mais dans le cas de cet exercice de manière peut-être particulièrement saillante, est celui du choix de la stratégie de démonstration. En effet, démontrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie et en majorer la dimension est un type de question plutôt rare, pour lequel il n'y a pas de raison que les candidats connaissent une méthode par défaut.

Face à une telle situation, les candidats sont souvent tentés par le raisonnement par l'absurde, sans doute parce qu'il offre le bénéfice à court terme de donner un élément d'information

1. Il ne s'agit pas ici de dire que le jury attend que les candidats expliquent systématiquement pourquoi les éléments de l'énoncé sont bien définis, mais plutôt de dire comment une interrogation typique se déroule.

supplémentaire. Il a toutefois en contrepartie l'inconvénient à plus long terme de faire perdre le point de mire vers lequel on se dirige. Dans un raisonnement direct, on sait qu'on cherche à montrer que $\dim E \leqslant C^2$, alors que dans un raisonnement par l'absurde, on suppose que $\dim E > C^2$ et on cherche une contradiction — mais laquelle ?

Dans le cas précis de cet exercice, il ne nous semble pas que faire l'hypothèse que $\dim E > C^2$ aide particulièrement à construire l'argument, et nous proposons un raisonnement direct. Nous allons donc chercher à montrer que $\dim E \leqslant C^2$.

Pour ce faire, on pourrait penser à prendre une base de E et montrer qu'elle a moins de C^2 éléments ; mais ceci a l'inconvénient que, ne sachant pas a priori que la dimension de E est finie, il faudrait envisager la possibilité qu'elle ne le soit pas, ce qui complique l'écriture, ne serait-ce que de la base elle-même. Il semble donc plus judicieux de chercher à démontrer que *toute famille libre finie de E a au plus C^2 éléments.*

Disons encore une fois que dans une interrogation typique, une partie de ce qui précède aura été dit par les candidats, et une autre partie aura été élaborée dans la discussion avec l'examinateur.

La première étape de la démonstration consiste donc à se donner une famille libre finie $(e_1, \ldots, e_d)$ de E, avec l'objectif de démontrer que $d \leqslant C^2$. À ce stade, au vu des éléments fournis par l'énoncé, et même sans savoir exactement encore à quoi cela servira, il semble assez naturel de supposer notre famille orthonormale vis-à-vis du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est un exemple d'une proposition que le jury attend que de bons candidats fassent spontanément, et qu'ils justifient la possibilité de le faire, par exemple en évoquant le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt.

L'inégalité $d \leqslant C^2$ peut se lire de deux façons : en disant que d n'est pas trop grande, ou en disant que C n'est pas trop petite. Le fait que C, donnée par l'énoncé, semble "connue", alors que d semble l'être moins, rend sans doute un peu moins naturel d'adopter le deuxième point de vue ("C n'est pas trop petite"), alors qu'il se révélera fructueux.

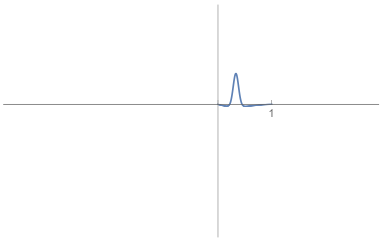
Pour attirer l'attention des candidats dessus, l'examinateur pourra par exemple demander quelle est la meilleure constante C qui convienne dans l'inégalité de l'énoncé, attendant que les candidats expliquent que la constante est d'autant meilleure qu'elle est plus petite, et que la constante optimale est donc le plus petit majorant de l'ensemble $\{\|f\|_\infty / \|f\|_2 : f \in E \setminus \{0\}\}$, c'est-à-dire sa borne supérieure. Une telle question est aussi, pour l'examinateur, l'occasion de vérifier la maîtrise de notions fondamentales comme celles de majorant et de borne supérieure.

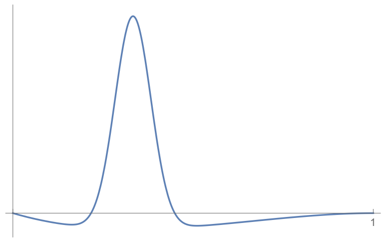
En termes un peu vagues, montrer que C est grande revient donc à montrer qu'il existe dans E des fonctions dont la norme $\|\cdot\|_\infty$ est beaucoup plus grande que la norme $\|\cdot\|_2$. Plus précisément, pour montrer que $C \geqslant \sqrt{d}$, il suffit de montrer qu'il existe dans le sous-espace engendré par $(e_1, \ldots, e_d)$ une fonction dont la norme $\|\cdot\|_\infty$ est $\sqrt{d}$ fois plus grande que la norme $\|\cdot\|_2$.

On en arrive donc à prendre l'énoncé original à revers et à chercher à démontrer l'énoncé suivant : *dans un espace vectoriel de dimension $d \geqslant 1$ de fonctions continues sur $[0, 1]$, il existe une fonction h non identiquement nulle telle que $\|h\|_\infty \geqslant \sqrt{d}\, \|h\|_2$.*

Les candidats pourront légitimement se sentir un peu démunis à l'idée de devoir construire une fonction avec aussi peu d'éléments qu'ils en ont à leur disposition. Il n'est pas interdit de le dire : cette remarque fait bel et bien partie de l'analyse du problème.

Il peut être utile à ce stade de faire un dessin, nécessairement très grossier, de l'allure d'une telle fonction g, qui a un grand maximum et une intégrale petite. Ce dessin peut être fait de multiples manières : nous en proposons une qui n'est pas très bonne, et une qui est moins mauvaise.





Pour construire cette fonction, on ne dispose de rien d'autre que de la famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_d)$ qu'on s'est donnée. À ce stade, il est vraisemblable que l'examinateur devra suggérer aux candidats de se donner $x \in [0,1]$ et de chercher une fonction g_x telle qu'on ait, pour tout $f \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d)$,

$$f(x) = \langle f, g_x \rangle.$$

Cette indication donnée, les candidats devraient parvenir rapidement à démontrer que l'unique fonction g_x qui ait cette propriété est la fonction

$$g_x = e_1(x)e_1 + \ldots + e_d(x)e_d.$$

On peut calculer $\|g_x\|_2^2$ par une application du théorème de Pythagore :

$$\|g_x\|_2^2 = e_1(x)^2 + \ldots + e_d(x)^2.$$

Calculer $\|g_x\|_\infty$ n'est pas possible avec les informations que nous avons, mais on peut observer que

$$\|g_x\|_2^2 = \langle g_x, g_x \rangle = g_x(x) \leqslant \|g_x\|_\infty,$$

ce qui donne un renseignement utile.

On peut maintenant utiliser l'hypothèse pour écrire

$$\|g_x\|_2^2 \leqslant \|g_x\|_\infty \leqslant C\|g_x\|_2 \text{ et en déduire que } \|g_x\|_2 \leqslant C$$

.

On peut aussi comprendre l'inégalité $\|g_x\|_2 \leqslant C$ de la façon suivante : l'hypothèse de l'énoncé s'ecrit $| < f, g_x > | \leqslant C\|f\|_2$ pour tout $f \in E$. Or les candidats connaissent bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz $| < f, g_x > | \leqslant \|g_x\|_2\|f\|_2$. Ce que l'on vient de montrer, c'est que dans cette inégalité $\|g_x\|_2$ est la constante optimale.

Ainsi, $C \geqslant \|g_x\|_2$ et en élevant au carré,

$$e_1(x)^2 + \ldots + e_d(x)^2 \leqslant C^2.$$

Après avoir en vain cherché à trouver un x_0 pour lequel le membre de gauche est supérieur ou égal à d, les candidats pourront penser, avec plus ou moins d'aide, à intégrer par rapport à x les deux termes de cette inégalité, pour aboutir à

$$d = \int_0^1 \left(e_1(x)^2 + \ldots + e_d(x)^2\right) \mathrm{d}x \leqslant C^2,$$

ce qui est l'inégalité souhaitée.

Il semble qu'on ait conclu par une sorte de pirouette, sans vraiment expliciter la fonction h promise vérifiant l'inégalité $\|h\|_\infty \geqslant \sqrt{d}\,\|h\|_2$. L'examinateur pourra demander aux candidats si ils peuvent en trouver une. Une manière de répondre à cette question est de constater que de l'égalité

$$\int_0^1 \|g_x\|_2^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e_1(x)^2 + \ldots + e_d(x)^2\right)\,\mathrm{d}x = d$$

et de la continuité de la fonction $x \mapsto \|g_x\|_2^2$ découlent l'existence d'un x_0 tel que $\|g_{x_0}\|_2^2 = d$ (précisément le x_0 qu'on cherchait il y a quelques minutes). On a alors

$$\|g_{x_0}\|_\infty \geqslant \|g_{x_0}\|_2^2 = \sqrt{d}\,\|g_{x_0}\|_2.$$