CONCOURS D'ADMISSION 2021

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 1_Automne

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Lundi 19 Octobre 2020 de 09h00 à 12h00

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

L'objet de ce problème est l'utilisation de techniques de séries entières pour l'estimation asymptotique de certaines quantités combinatoires. Le problème comporte trois parties qui sont largement indépendantes, néanmoins on peut être amené dans une partie à utiliser les résultats principaux des précédentes.

Partie 1 : Polynômes de Bernstein

Étant donnée une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit son module de continuité ω par

$$\omega(\delta) = \sup \left\{ |f(x) - f(y)| \,,\ (x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| \leqslant \delta \right\}.$$

On pose également $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Pour tous $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ on pose $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes de Bernstein*.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère une suite $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre x : $\mathbb{P}(X_i = 1) = x$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - x$. On pose

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n} \right) \right] \text{ où } S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Montrer que le module de continuité ω est un nombre réel bien défini, et qu'il vérifie

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0.$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, la famille $(B_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

(Indication : on pourra s'intéresser au comportement de $B_{n,k}(x)$ au voisinage de $x = 0$.)

3. Montrer que $B_n(f)$ est un polynôme de degré n en x, que l'on exprimera en fonction des $B_{n,k}$.

4. Montrer que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \omega(\delta) + 2\,\|f\|_\infty\, \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geqslant \delta \right),$$

puis

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

5. En déduire le *théorème de Weierstrass* : pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et toute fonction continue f sur $[a,b]$, il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.

Partie 2 : Théorème de Hardy-Littlewood

On considère dans cette partie une série entière *à coefficients positifs* $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, de rayon de convergence égal à 1, dont la somme sera notée $f(x)$. On s'intéresse aux relations entre le comportement de $f(x)$ lorsque $x \to 1$ et et la suite des coefficients (a_n).

6. Considérons une autre série entière à coefficients positifs $\sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$ de rayon 1 dont la somme est notée g. On suppose que $\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$. Montrer que

$$a_n \underset{n \to \infty}{\sim} b_n \Longrightarrow f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} g(x). \qquad (\dagger)$$

(Indication : pour $\varepsilon > 0$, on introduira un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n$ et on considèrera la différence $|f(x) - g(x)|$.)

7. On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que

$$s_n \underset{n \to \infty}{\sim} n \Longrightarrow f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}. \qquad (\ddagger)$$

8. L'objet de cette question est d'établir la réciproque de la propriété ($\ddagger$), due à Hardy et Littlewood.

On se donne donc $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite à termes positifs telle que la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de rayon 1 et $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$ quand $x \to 1$. Pour $N \geqslant 0$ on pose $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, et l'objectif est de démontrer que $s_N \sim N$ quand $N \to \infty$.

(a) Soit φ la fonction sur $[0, 1]$ définie par

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0 \text{ si } 0 \leqslant t < e^{-1} \\ \varphi(t) = 1/t \text{ si } e^{-1} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des polynômes P^- et P^+ tels que :

$$P^- \leqslant \varphi \leqslant P^+ \text{ sur } [0, 1], \text{ et } \int_0^1 (P^+(x) - P^-(x))dx \leqslant \varepsilon.$$

(b) Montrer que pour tout polynôme réel P on a

$$\lim_{x \to 1} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)dt.$$

(Indication : on pourra d'abord considérer le cas d'un monôme.)

(c) En déduire que

$$\lim_{x \to 1} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(x^n) = 1$$

(d) En considérant $x = e^{-1/N}$, démontrer le résultat souhaité.

9. Montrer que la réciproque de ($\dagger$) est fausse : construire une série entière à termes positifs (a_n) telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x}$ quand $x \to 1$ mais (a_n) ne tend pas vers 1.

Partie 3 : Une application

Étant donné un entier $q \geqslant 1$, on appelle *partition de q* toute suite finie d'entiers $(k_1, \ldots, k_r)$ telle que $1 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_r$ et $\sum_{i=1}^{r} k_i = q$. Une partition $(k_1, \ldots, k_r)$ est dite *distincte* si $k_1 < \cdots < k_r$. L'entier r est le *nombre d'éléments* de cette partition.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x^k}{k}\right) \text{ et } f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^k}{k}\right)$$

(si cette limite existe).

10. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ converge et que $f(x)$ est un réel strictement positif.

11. On écrit $f_n(x)$ sous la forme $f_n(x) = \sum_{q=0}^{d_n} a_{q,n} x^q$. Montrer que quand $q \geqslant 0$ est fixé et n tend vers l'infini, la suite $(a_{q,n})$ converge vers une limite a_q et que pour tout $q \geqslant 1$

$$a_q = \sum \frac{1}{k_1 \cdots k_r},$$

où la somme porte sur l'ensemble des partitions distinctes $(k_1, \ldots, k_r)$ de q.

12. (a) Soit $P(q,r)$ le nombre de partitions de q à r éléments. Montrer que $P(q,r) \leqslant \binom{q}{r}$.

(Indication : pour une partition $(k_1, \ldots, k_r)$ on pourra considérer les entiers $k_1, k_1 + k_2, \ldots, k_1 + \cdots + k_r$.)

(b) Montrer que $a_q \leqslant \sum_{r=1}^{q} \frac{P(q,r)}{r!}$.

(c) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_ε telle que pour tout q,

$$a_q \leqslant C_\varepsilon (1+\varepsilon)^q.$$

(indication : on pourra, en la justifiant, utiliser une inégalité du type $r! \geqslant C k^r$, où C et k seront judicieusement choisis)

13. Démontrer que la série entière $\sum_{q \geqslant 0} a_q x^q$ est de rayon 1, et que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$f(x) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q x^q.$$

14. Montrer que quand $x \to 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^k}{k}\right) = -\ln(1-x) - \gamma + o(1),$$

où γ est la constante d'Euler, définie par

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

En déduire que

$$\frac{1}{q}(a_0 + \cdots + a_q) \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\gamma}.$$

Note : par une analyse plus poussée on pourrait montrer que $a_q \to e^{-\gamma}$ quand $q \to \infty$.

◇ ◇ ◇