CONCOURS D'ADMISSION 2022

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 1_Automne

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Samedi 18 septembre 2021 de 09h00 à 12h00

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Ce problème porte sur le développement des nombres réels sous la forme de fraction continue. Une *fraction continue* est une expression de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

où $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite finie ou infinie de nombres réels. Dans le cas où la suite est finie, on notera

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites d'entiers $(a_n)_{n \geqslant 0}$ telles que $a_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. En général la suite (a_n) est choisie dans $\mathcal{S}$, néanmoins il pourra être utile par endroits de prendre pour (a_n) une suite quelconque.

On notera également $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

Partie 1 : Convergence des fractions continues

On se donne une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ dans $\mathcal{S}$.

1. Montrer qu'il existe des suites d'entiers $(p_n)_{n \geqslant 0}$ et $(q_n)_{n \geqslant 0}$ telles que pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En déduire une relation de récurrence entre p_{n+1}, p_n et p_{n-1} (respectivement q_{n+1}, q_n et q_{n-1}). Montrer également que (q_n) est strictement croissante.

2. Montrer que pour $n \geqslant 1$ et tout $\alpha > 0$ on a la relation $[a_0; a_1, \ldots, a_n + \alpha] = \dfrac{p_{n-1}\alpha + p_n}{q_{n-1}\alpha + q_n}$. En déduire que $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$.

3. Montrer que $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}$

4. Montrer que les suites $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ et $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ sont strictement monotones et convergent vers la même limite qui sera notée x.

5. Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$x \neq \frac{p}{q} \text{ et } \left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

6. En déduire que x est irrationnel ($x \notin \mathbb{Q}$).
On notera dans la suite $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots] = \mathcal{FC}((a_n)_{n \geqslant 0})$.

7. Exemple : montrer que $[1; 1, 1, \ldots, 1, \ldots] = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
Pour cela on pourra étudier les puissances de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et ses liens avec la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$, et montrer qu'il existe des constantes α, β, r_1 et r_2 telles que $F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ (il n'est pas forcément utile de les calculer toutes).

Partie 2 : Développement d'un irrationnel en fraction continue

Dans cette partie on se donne $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et on cherche à écrire x sous la forme d'un développement en fraction continue : $x = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$, où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à $\mathcal{S}$. En remplaçant x par $x - a_0$ nous supposerons dans toute cette partie que $x \in [0, 1[$ et nous poserons $a_0 = a_0(x) = 0$.

On pose

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

On pose également $T^0(x) = x$, $T^1(x) = T(x)$ et pour tout $j \geqslant 2$, $T^j(x) = T \circ \cdots \circ T(x)$ (j termes).

8. Représenter le graphe de la fonction T.

9. Montrer que $T^j(x)$ est bien défini pour tout $j \geqslant 0$.

10. Pour tout $j \geqslant 1$ on pose $a_j(x) = \left\lfloor \dfrac{1}{T^{j-1}(x)} \right\rfloor$ (on rappelle que $x \in [0, 1[$). Montrer que la suite $(a_j(x))_{j\geqslant 0}$ appartient à $\mathcal{S}$, et que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$x = [0; a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x) + T^n(x)].$$

En déduire que pour tout $p \geqslant 1$ on a

$$[0; a_1(x), \dots, a_{2p}(x)] \leqslant x \leqslant [0; a_1(x), \dots, a_{2p-1}(x)].$$

11. En utilisant les résultats de la première partie, en déduire que $x = \mathcal{FC}((a_n(x))_{n\geqslant 0})$.

12. Exemple : une approximation de π utilisée depuis plus de 2000 ans est $\pi \approx [3; 7] = \frac{22}{7}$.

(a) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi.$$

(b) En déduire que

$$0 < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{256}.$$

Partie 3 : Fractions continues périodiques

On dit qu'un nombre réel α est *quadratique* s'il est irrationnel, et s'il est de plus solution d'une équation de degré 2 à coefficients rationnels, c'est à dire qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ avec $a \neq 0$, tel que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

13. Montrer que si α est quadratique, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est quadratique, et pour tout $(r, s) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$, $r\alpha + s$ est quadratique.

14. (a) Montrer que si la suite (a_n) est périodique, c'est à dire qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que pour tout n on a $a_{n+p} = a_n$, alors $\mathcal{FC}((a_n)_{n\geqslant 0})$ est un nombre quadratique.
(indication : on pourra considérer la fonction $x \mapsto [a_0; a_1, \dots, a_n + x]$)

(b) Montrer qu'il en est de même si la suite (a_n) est périodique au delà d'un certain rang (i.e. $a_{n+p} = a_n$ pour $n \geqslant n_0$).

15. Soient a et b des entiers strictement positifs.

(a) Montrer que $(a+b)^2+4$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

(b) Montrer que l'équation $x^2+(b-a)x-ab-1=0$ admet deux solutions irrationnelles dont exactement une est positive. On la notera x_0.

(c) Montrer que le développement en fraction continue de x_0 est périodique au delà d'un certain rang.

(indication : montrer que x_0 satisfait la relation $x_0 = a + \dfrac{1}{x_0+b}$)

Un théorème de Lagrange affirme que plus généralement tout irrationnel quadratique admet un développement en fraction continue périodique au delà d'un certain rang.

Partie 4 : Approximation diophantienne

Il découle des résultats des parties 1 et 2 que pour tout nombre $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x-\dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$ (noter que dans cette estimation on ne perd rien à supposer que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible). Dans cette partie nous allons montrer que ce résultat est optimal.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ on note $|I|$ la longueur de I (par exemple pour $I=[a,b]$, $|I|=b-a$). On dit qu'un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est *négligeable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite d'intervalles ouverts $(I_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\geqslant 0} I_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$. On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas négligeable.

16. Montrer que $\mathbb{Q}$ est négligeable. En déduire que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

17. Soient C et δ des constantes strictement positives qui seront fixées dans toute la suite du problème. On introduit l'ensemble

$$\mathcal{L} = \left\{x \in [0,1], \text{ il existe une infinité de } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ tels que } \left|x-\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{C}{q^{2+\delta}}\right\},$$

ainsi que pour $q \in \mathbb{N}^*$ fixé

$$\mathcal{L}_q = \left\{x \in [0,1], \text{ il existe } p \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \left|x-\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{C}{q^{2+\delta}}\right\}.$$

(a) Exprimer $\mathcal{L}$ en fonction des $\mathcal{L}_q$ à l'aide des symboles $\cup$ et $\cap$.

(b) En déduire que $\mathcal{L}$ est négligeable.

◇ ◇ ◇