CONCOURS D'ADMISSION 2022

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 1_Automne

Épreuve n°3

PHYSIQUE

Dimanche 19 septembre 2021 de 09h00 à 12h00

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

– Propagations –

Le problème comporte 3 exercices indépendants portant sur des domaines différents de la physique dans lesquels un phénomène physique se propage.

Valeurs numériques de quelques constantes fondamentales :

Charge élémentaire : e = $1{,}60\cdot10^{-19}$ C

Célérité de la lumière dans le vide : c = $3{,}0\cdot10^{8}$ m.s^{-1}

Permittivité et perméabilité relative du vide : $\epsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}\cdot 10^{-9}$ USI et $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ USI.

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,3806485210^{-23}$ USI.

Formulaire :

Dérivée partielle : on considère une fonction de plusieurs variables $f(x,y)$ et on rappelle que la dérivée partielle, par exemple $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, de cette fonction est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, ici x, les autres étant gardées constantes.

Exemple :$f(x,y) = x^2\cos(3y) \longrightarrow \partial f/\partial x = 2x\cos(3y)$ et $\partial f/\partial y = -3x^2\sin(3y)$.

Opérateurs d'analyse vectorielle du premier ordre en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Opérateurs d'analyse vectorielle du second ordre (Laplaciens) :

- Laplacien d'un champ scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- Expression analytique du Laplacien scalaire de $f(r)$ en coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf)$
- Laplacien d'un champ vectoriel : $\vec{\Delta}\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V})$

Exercice 1 : Diffraction d'une onde E.M. par un réseau métallique

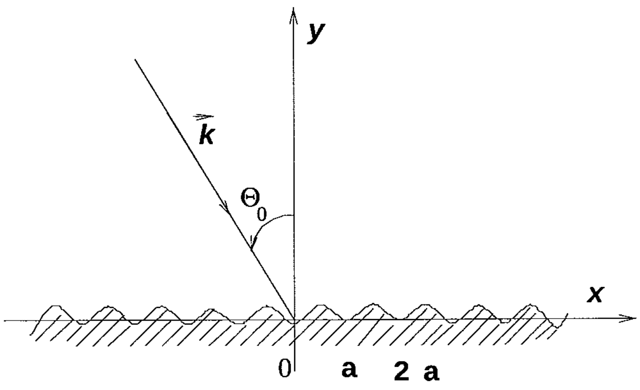
L'espace est rapporté au trièdre orthonormé direct $Oxyz$ dont les vecteurs unitaires sont notés $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. j désigne le nombre complexe défini par $j^2 = -1$.

On se propose d'étudier la diffraction d'une onde électromagnétique par un réseau plan métallique utilisé par réflexion.

La surface $y = f(x)$ est celle du réseau dont le pas a est la période de la fonction $f(x)$. Cette surface, infinie dans les directions x et z, sépare l'espace en deux parties (voir figure):

- la région $y > f(x)$ est vide
- la région $y < f(x)$ est remplie d'un métal parfaitement conducteur.

On pose $K = \dfrac{2\pi}{a}$.



Une onde incidente plane monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement, progressive de vecteur d'onde k (appartenant au plan xOy) tombe sur la surface du réseau avec un angle d'incidence $\theta_0 = (\vec{u}_y, -\vec{k})$.

En un point M de coordonnées x, y, z le champ électrique E_i de cette onde s'écrit, en notation complexe :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{j(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)} \vec{u}_z$$

E_0 désigne une constante complexe. Sur le réseau cette onde donne naissance à une onde diffractée, monochromatique de pulsation ω, dont le champ électrique $\vec{E}_D$ est aussi polarisé rectilignement suivant Oz et on pose :

$$\vec{E}_D = E(x, y, z) e^{-j\omega t} \vec{u}_z$$

On appelle $\vec{E}_T = \vec{E}_D + \vec{E}_i$ le champ électrique total qui règne au-dessus du réseau.

1.a – Rappeler les équations de Maxwell que doivent vérifier le champ électrique total $\vec{E}_T$ et la champ magnétique total $\vec{B}_T$ dans le vide (en l'absence de toute charge et de tout courant) en fonction de la vitesse c de la lumière dans le vide.

1.b – En déduire l'équation de propagation que doit vérifier le champ électrique total $\vec{E}_T$.

1.c – Écrire la condition aux limites à laquelle doit satisfaire le champ électrique total $\vec{E}_T$ à la surface du réseau.

2 – Déterminer une relation entre le module k du vecteur d'onde incident $\vec{k}$, ω et c.

3.a – Montrer que la fonction scalaire E ne dépend pas de la variable z.

3.b – Déterminer l'équation différentielle que doit vérifier la fonction E.

3.c – Déterminer une relation entre $E(x+a, f(x))$, $E(x, f(x))$, k, a et θ_0.

4 – On cherche si la fonction $E(x,y) = Ae^{j(\alpha x+\beta y)}$ où les coefficients A, α et β sont des constantes réelles et complexes, est solution pour la détermination de $\vec{E}_D$.

4.a – Montrer que nécessairement :

- α et β sont liés par une relation à k (relation (1))
- α, θ_0, k et K sont liés par une relation qui fait intervenir un nombre entier n (relation (2)).

4.b – Montrer que si a est suffisamment grand (ce que l'on supposera dans la suite du problème), il existe deux entiers positifs (ou nuls) N_1 et N_2 tels que, pour $-N_1 \leq n \leq N_2$, on peut poser

$$\alpha = k \sin\theta \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

Déterminer alors β en fonction de k et de θ et caractériser l'onde ainsi obtenue.

A.N. calculer N_1 et N_2 pour un réseau possédant 500 traits par mm, éclairé par une onde de longueur d'onde $\lambda = 0.55\ \mu$m arrivant sous une incidence de $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

4.c – Caractériser le champ électrique de l'onde obtenue lorsque $n < -N_1$ ou $n > N_2$. Que devient cette onde dès qu'elle s'écarte du réseau ? Préciser ce résultat par une application numérique (pour $n = -N_1 - 1$ ou $n = N_2 + 1$ par exemple avec les valeurs numériques précédentes).

4.d – Montrer en fait que la fonction proposée ne convient pas.

5 – A chaque entier n, on associe la fonction $E_n(x,y) = A_n e^{j(\alpha_n x+\beta_n y)}$ où on a indicé par n les coefficients A, α et β de la question précédente. α_n et β_n satisfont donc aux relations (1) et (2) de la question précédente et on pose de même $\alpha_n = k\sin\theta_n$ lorsque l'entier n est compris entre $-N_1$ et N_2. On admet alors que la solution du problème proposé s'écrit sous la forme d'une somme des solutions précédentes :

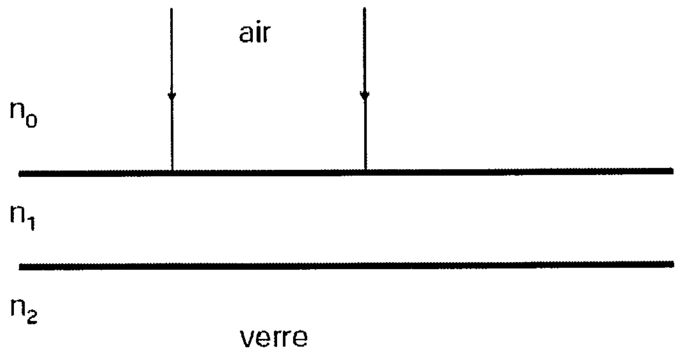
$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j(\alpha_n x+\beta_n y)}$$

5.a – En général on observe l'onde diffractée assez loin du réseau (y grand). Dans ces conditions expliquer pourquoi il suffit de ne considérer, dans la somme précédente, que les termes en n compris entre $-N_1$ et N_2.

5.b – Vérifier alors que l'on retrouve bien un résultat connu pour les réseaux et retrouver la relation entre θ_n, θ_0, λ, a et n d'une manière plus "classique".

Exercice 2 : Étude d'une couche mince diélectrique

Une couche mince diélectrique transparente d'indice de réfraction n_1 et d'épaisseur e est déposée sur du verre transparent d'indice n_2. L'indice de l'air est n_0 . L'ensemble est éclairé en incidence normale par un faisceau parallèle de lumière monochromatique de longueur d'onde λ et d'amplitude unité. On note par r_{ij} le coefficient de réflexion de la surface séparant le milieu d'indice n_i du milieu d'indice n_j , la lumière venant du milieu d'indice n_i . On note par t_{ij} le coefficient de transmission correspondant.



1 – On admettra que $r_{ij} = \dfrac{n_i - n_j}{n_i + n_j}$ et que $t_{ij} = \dfrac{2n_i}{n_i + n_j}$. Justifier brièvement comment on obtient ces deux expressions (la démonstration complète n'est pas demandée).

2 – Quel phénomène d'optique ondulatoire se produit de part et d'autre de la lame de verre?

3 – On montre que l'amplitude complexe u_p du $p^{\text{ième}}$ rayon réfléchi par le système (p est un nombre entier quelconque) vaut : $u_p = t_{01}(r_{12})^{p-1}(r_{10})^{p-2}t_{10}e^{-(p-1)i\Phi}$

Définir les différents paramètres intervenant dans la formule précédente. Φ désigne le déphasage du $p^{\text{ième}}$ rayon réfléchi par rapport au premier rayon réfléchi. Quelle est son expression en fonction de λ, e et n_1?

4 – En déduire la valeur de l'amplitude réfléchie totale $U_R = \sum\limits_p u_p$.

5 – Simplifier l'expression précédente en utilisant les relations suivantes : $r_{10} = -r_{01}$ et $t_{10} \times t_{01} = 1 - (r_{01})^2$. On montrera que : $U_R = \dfrac{r_{01} + r_{12}e^{-i\Phi}}{1 + r_{01}r_{12}e^{-i\Phi}}$

6 – En s'inspirant de ce qui a été vu précédemment, calculer l'amplitude v_p du $p^{\text{ième}}$ rayon transmis en prenant comme origine des phases la phase du premier rayon transmis. En déduire la valeur de l'amplitude totale $U_T = \sum\limits_p v_p$ transmise par la couche mince.

7 – Calculer les facteurs de réflexion $R = |U_R|^2$ et de transmission $T = \dfrac{n_2}{n_0}|U_T|^2$ de la couche mince d'indice n_1. Que vaut $R + T$? Interpréter.

8 – On suppose que $n_0 < n_1 < n_2$. Représenter schématiquement les variations de T en fonction de Φ, déphasage introduit par la lame de verre.

9 – En déduire les valeurs de Φ et donc de e pour lesquelles R est minimum.

10 – Une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,55$mm tombe en incidence normale sur une lame de verre d'indice $n_2 = 1,52$ et d'épaisseur infinie. Calculer le facteur de réflexion R_0 de la surface de séparation air-verre.

11 – On dépose sur cette lame une couche mince de fluorure de magnésium d'indice $n_1 = 1,38$ d'épaisseur $e = 996.10^{-10}$m. Calculer le facteur de réflexion de la lame de verre recouverte par cette couche mince en fonction de n_0, n_1 et n_2. Donner sa valeur numérique. Quelle est l'application pratique de ce type de système?

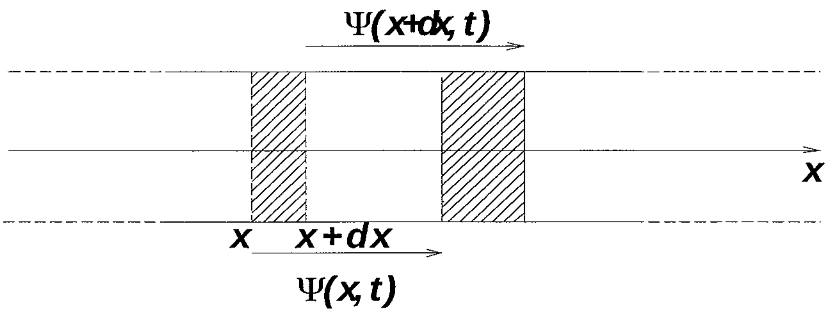
Exercice 3 : Propagation d'ondes acoustiques

On supposera que les parois des différents tuyaux qui interviennent dans ce problème n'exercent aucun frottement sur le (les) fluide(s). On néglige, de plus, l'action de la pesanteur.

Un tuyau cylindre de section constante S, d'axe $x'x$, contient un fluide qui au repos est à la pression P_0, à la température T_0; sa masse volumique est ρ_0.

On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses x et $x + dx$. Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse x : soit $\psi(x,t)$ ce déplacement à l'instant t; ainsi la tranche de fluide considérée se trouve à l'instant t entre les plans $x + \psi(x,t)$ et $x + dx + \psi(x + dx, t)$. On note $u(x,t) = \partial\psi/\partial t$ la vitesse de déplacement de la section d'abscisse x à l'instant t, $\rho(x,t)$ la masse volumique du fluide de cette section, $p(x,t)$ la surpression liée au passage de l'onde en x à t.

On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes; ainsi on pourra négliger dans la suite tous les infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à deux.



1 – En raisonnant sur la tranche de fluide considérée, établir, en précisant la loi utilisée que :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

2 – Quelle hypothèse thermodynamique peut-on faire sur la nature de l'évolution du fluide ? Justifier. Montrer que cette hypothèse conduit à la relation :

$$p = -\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

où χ_s est le coefficient de compressibilité isentropique : $\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$

3 – Établir l'équation à laquelle satisfait la grandeur $\psi(x,t)$. Montrer par le changement de variables suivant :

$$w = x - ct$$
$$v = x + ct$$

que cette équation s'écrit de manière équivalente :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial w} = 0$$

Quelle est la solution générale de cette équation ? Quelle est l'interprétation de chacune des deux solutions à cette équation ? Quelle est l'expression de c, vitesse de propagation de l'onde ?

4 – Montrer que les grandeurs $p(x,t)$ et $u(x,t)$ satisfont à la même équation de propagation que $\psi(x,t)$.

5 – Le fluide considéré est de l'air considéré comme un gaz parfait :

- de $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = 1.4$
- de masse molaire $M = 29\text{g.mol}^{-1}$
- de température $T_0 = 293\text{K}$

Justifier la valeur de γ. Calculer c.

6 – On considère la propagation dans le fluide d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω qu'on représente en notation complexe par :

$$\underline{\psi_1}(x,t) = A_1 \exp i(\omega t - kx)$$

où A_1 est une constante et k un réel positif (module du vecteur d'onde). On supposera dans cette question que le tuyau est infini et donc qu'il n'y a aucune onde réfléchie se superposant à ψ_1.

Quel est le sens de propagation de cette onde ? Déterminer l'expression de k en fonction de ω et de c et calculer sa valeur pour l'air avec une fréquence de l'onde de 1kHz.

7 – Exprimer alors $\underline{p_1}(x,t)$ et $\underline{u_1}(x,t)$, représentations complexes de la surpression et de la vitesse.

8 – On appelle résistivité acoustique R la grandeur caractéristique du milieu définie par $R = \rho_0 c$. Montrer que le rapport $\dfrac{\underline{p_1}}{\underline{u_1}}$ s'exprime simplement en fonction de R.

9 – Soit l'onde

$$\underline{\psi_1'}(x,t) = A_1' \exp i(\omega t + kx)$$

$\underline{p_1'}$ et $\underline{u_1'}$ étant les ondes de surpression et de vitesse associées. Exprimer le rapport $\dfrac{\underline{p_1'}}{\underline{u_1'}}$ en fonction de la résistivité R du milieu.

Le tuyau est maintenant séparé en deux régions :

- la région (1) ($x < 0$) contient un fluide (1) de résistivité acoustique $R_1 = \rho_1 c_1$
- la région (2) ($x > 0$) contient un fluide (2) de résistivité acoustique $R_2 = \rho_2 c_2$

La surface de contact entre les deux fluides est donc le plan perpendiculaire en O à l'axe $x'x$. Une onde acoustique plane sinusoïdale se propage du milieu (1) vers le milieu (2) et est décrite en notation complexe par :

$$\underline{p_1}(x,t) = p_{O1} \exp i(\omega t - k_1 x)$$

A l'interface entre les deux milieux, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1) : $\underline{p_1}'$ et à une onde transmise dans le milieu (2) : $\underline{p_2}$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des ondes planes sinusoïdales d'amplitude respective p'_{O1} et p_{O2}.

Justifier que la pression est continue en $x = 0$ et qu'il y a également continuité du débit volumique $S.u$.

10 – Montrer que les ondes réfléchie et transmise sont de même pulsation ω que l'onde incidente.

11 – Exprimer $\underline{p_1}'$ et $\underline{p_2}$.

12 – En exploitant les conditions de continuité, exprimer en fonction de R_1 et R_2 les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} relatifs aux amplitudes des surpressions. Ces coefficients sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{p'_{O1}}{p_{O1}} \\ t_{12} &= \frac{p_{O2}}{p_{O1}} \end{aligned}$$

13 – On définit la puissance transportée par chaque onde par~: $P = S|p.u|$. Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T relatifs aux puissances acoustiques. Quelle relation lie R à T. Que traduit cette relation ?

14 – Application numérique: le milieu (1) est de l'air et le milieu (2) est de l'eau. On prendra pour les résistivités acoustiques les valeurs suivantes : $R_1 = 4.5\,10^2$U.S.I et $R_2 = 1.4\,10^6$U.S.I. Déterminer R et T. Commenter.

Soit un tuyau sonore composé de deux parties cylindriques de même axe $x'x$ de sections respectives S_1 et S_2, raccordées par la surface perpendiculaire en O à l'axe $x'x$. Les deux régions sont remplies des fluides (1) et (2). Par définition, on appellera impédance acoustique du milieu i la grandeur $Z_i = \frac{R_i}{S_i}$, rapport de la résistivité acoustique par la section correspondante. On considère une onde plane acoustique incidente $\underline{p_1}$ se propageant dans le milieu (1) dans le sens des x positifs. Elle donne naissance à une onde réfléchie $\underline{p_1}'$ et à une onde transmise $\underline{p_2}$ à l'interface entre les deux milieux.

15 – Déterminer en fonction de Z_1 et Z_2 les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} relatifs aux amplitudes des surpressions.

16 – Déterminer les coefficients de réflexion R et T relatifs aux puissances acoustiques.

17 – En supposant que les fluides (1) et (2) sont identiques y a-t-il réflexion à l'interface entre les deux milieux ? Si oui, calculer r_{12} et t_{12} et préciser s'il y a changement de phase.

18 – Dans le cas où les deux fluides sont de nature différente retrouve-t-on les résultats précédents si $S_1 = S_2$