ÉCOLE POLYTECHNIQUE

IP PARIS

CONCOURS D'ADMISSION 2022

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Ce problème porte sur plusieurs aspects de la notion d'interpolation polynomiale.

Si n est un entier positif, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels.

Si g est une fonction continue sur le segment $[a,b]$ on note $\|g\|_{[a,b]}$ sa norme uniforme, à savoir $\|g\|_{[a,b]} = \sup\{|g(x)|,\ x \in [a,b]\}$.

Partie 1 : Polynôme d'interpolation de Lagrange

Soient $x_0, \ldots, x_n$ des nombres réels distincts. On définit une application $E : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$E(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)).$$

1. Vérifier que E est une application linéaire.

2. Montrer que E est injective. En déduire que pour tout $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, $P(x_i) = y_i$.

Par définition P est le *polynôme d'interpolation de Lagrange* associé aux données $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(y_0, \ldots, y_n)$.

3. a. Montrer que la famille de polynômes $(L_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ définie par

$$L_j(X) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{(X - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Exprimer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux données (x_i) et (y_i) en fonction des L_j.

4. Soit $V(x) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de Vandermonde, définie par $V(x) = (x_i^j)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a. Déduire des questions précédentes que le déterminant $\det(V(x))$ est non nul (on ne demande pas de préciser sa valeur).

b. Expliquer comment utiliser les polynômes de Lagrange pour calculer $V(x)^{-1}$, et détailler le calcul pour $n = 2$ (on pourra noter $D = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$).

Partie 2 : Convergence des polynômes d'interpolation

Dans cette partie on se donne une fonction f de classe C^∞ sur un segment $[a,b]$ avec $a < b$. On considère une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de réels distincts appartenant à $[a,b]$ et on note $P_n(X)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n tel que pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $P_n(x_i) = f(x_i)$. On pose également $\Pi_{n+1}(X) = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$.

5. Soit g une fonction p fois dérivable sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe $p+1$ points $c_0 < c_1 < \cdots < c_p$ de $[a,b]$ tels que $g(c_i) = 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in]c_0, c_p[$ tel que $g^{(p)}(\xi) = 0$. *(Indication : on pourra raisonner par récurrence sur p.)*

6. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$ il existe $\xi_x \in [a,b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x).$$

(Indication : x étant fixé et distinct des x_i, on pourra introduire la fonction g définie par $g(t) = f(t) - P_n(t) - A\Pi_{n+1}(t)$, où A est l'unique réel tel que $g(x) = 0$.)

7. Soit $g = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière de rayon $R' > 0$. On fixe deux réels r et R tels que $0 < r < R < R'$. L'objectif de cette question est de trouver une majoration de $\left\|g^{(k)}\right\|_{[-r,r]}$.

a. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geqslant 0$, $|a_n| \leqslant CR^{-n}$.

b. Déterminer la dérivée d'ordre k de $x \mapsto \left(1 - \frac{x}{R}\right)^{-1}$.

c. Montrer que pour tout $k \geqslant 0$,

$$\left\|g^{(k)}\right\|_{[-r,r]} \leqslant \frac{CRk!}{(R-r)^{k+1}}.$$

8. On suppose que f est développable en série entière de rayon $R' > \frac{3}{2}(b-a)$ autour du point $\frac{a+b}{2}$. Montrer que la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

9. Montrer que si f est développable en série entière de rayon infini autour de 0, alors la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Partie 3 : Divergence des polynômes d'interpolation

Dans cette partie on s'intéresse à l'approximation de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$$

sur l'intervalle $[-a,a]$, où $a \geqslant 1$ est un entier positif fixé. Pour $-n \leqslant k \leqslant n$, on pose $x_k = \frac{ak}{n}$. On note $p_n(X)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $2n$ qui interpole f aux $(2n+1)$ points x_k, c'est à dire tel que pour $-n \leqslant k \leqslant n$, $p_n(x_k) = f(x_k)$. On pose également $\pi_n(X) = \prod_{k=-n}^{n}(X - x_k)$.

10. Montrer que $p_n(-X) = p_n(X)$.

11. Montrer qu'il existe un polynôme q de degré 1 tel que $p_n(X)(X^2+1) - 1 = q(X)\pi_n(X)$, puis en déduire que $q(X) = cX$ pour un réel $c \neq 0$.

12. Montrer que

$$c = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{a^2k^2}{n^2}\right)}.$$

(Indication : on pourra évaluer l'égalité $p_n(X)(X^2+1) - 1 = cX\pi_n(X)$ en un point bien choisi.)

En déduire que pour tout $x \in [-a,a]$

$$\left|p_n(x) - \frac{1}{x^2+1}\right| = \frac{x^2}{x^2+1}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left|x^2 - \frac{a^2k^2}{n^2}\right| - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{a^2k^2}{n^2}\right)\right) \qquad (1)$$

13. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{a^2k^2}{n^2}\right)$.

14. Soit $y \in [0,1]$ un nombre irrationnel. Pour $n \geqslant 1$ on pose $\operatorname{dist}(ny, \mathbb{Z}) = \inf\{|ny-k|,\ k\in\mathbb{Z}\}$ Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $\operatorname{dist}(ny, \mathbb{Z}) \geqslant y/10$.

(Indication : on pourra considérer la suite $(ny \text{ modulo } 1)_{n\geqslant 0}$.*)*

15. On fixe $x \in [0,a]$ un nombre irrationnel. On rappelle que a est un entier.

(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \ln|x-t|\,dt$ est bien définie et la calculer.

(b) Soit k_x le plus grand entier k tel que $\frac{ak}{n} < x$. Montrer l'encadrement

$$\left|\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{k_x-1} \ln\left|x-\frac{ak}{n}\right| - \int_0^{ak_x/n} \ln|x-t|\,dt\right| \leqslant \max\left(\left|\frac{a}{n}\ln x\right|, \left|\frac{a}{n}\ln\left|x-\frac{ak_x}{n}\right|\right|\right).$$

On admettra que de manière similaire on a

$$\left|\frac{a}{n}\sum_{k=k_x+1}^{n-1} \ln\left|x-\frac{ak}{n}\right| - \int_{a(k_x+1)/n}^{a} \ln|x-t|\,dt\right| \leqslant \max\left(\left|\frac{a}{n}\ln a\right|, \left|\frac{a}{n}\ln\left|x-\frac{a(k_x+1)}{n}\right|\right|\right).$$

(c) En utilisant la question 14, montrer qu'il existe une suite extraite $(n_j)_{j\geqslant 0}$ telle que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a}{n_j}\sum_{k=1}^{n_j} \ln\left|x-\frac{ak}{n_j}\right| = \int_0^a \ln|x-t|\,dt.$$

16. Dans cette question on prend $a=5$ et on admet que

$$\int_0^5 \ln|5-t|\,dt + \int_0^5 \ln|5+t|\,dt - \int_0^5 \ln\left(1+t^2\right)dt > 0.$$

Montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas simplement vers f sur $[-5,5]$.

◇◇◇