

CONCOURS D'ADMISSION 2022

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_ Printemps

Épreuve n°3

PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

– Couplages champs-matière –

Le problème comporte 3 exercices indépendants portant sur des domaines différents de la physique dans lesquels on s'intéresse particulièrement au couplage entre le champ électromagnétique et la matière.

Valeurs numériques de quelques constantes fondamentales :

Charge élémentaire : $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

Permittivité et perméabilité relative du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ USI et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ USI.

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,3806485210^{-23}$ USI.

Formulaire :

Dérivée partielle : on considère une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$ et on rappelle que la dérivée partielle, par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$, de cette fonction est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, ici x , les autres étant gardées constantes.

Exemple : $f(x, y) = x^2 \cos(3y) \rightarrow \partial f / \partial x = 2x \cos(3y)$ et $\partial f / \partial y = -3x^2 \sin(3y)$.

Opérateurs d'analyse vectorielle du premier ordre en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\text{div}(\overrightarrow{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

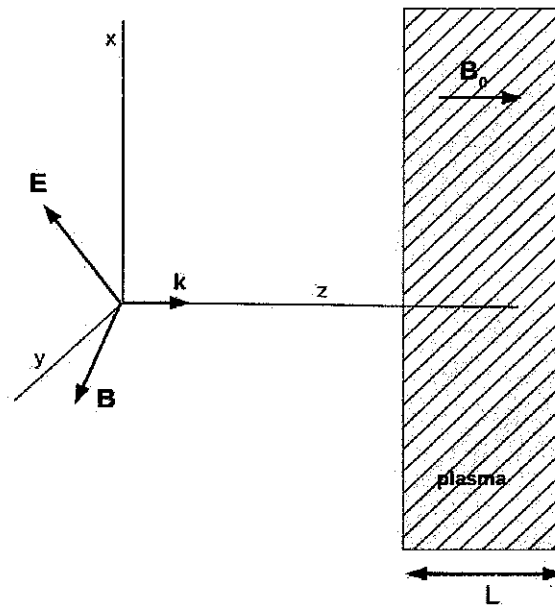
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Opérateurs d'analyse vectorielle du second ordre (Laplaciens) :

- Laplacien d'un champ scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- Expression analytique du Laplacien scalaire de $f(r)$ en coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rf)$
- Laplacien d'un champ vectoriel : $\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V})$

Exercice 1 : Onde électromagnétique et plasma

On assimile l'ionosphère à un plasma, milieu électriquement neutre composé d'électrons libres et protons initialement au repos. On considérera que les protons restent au repos, on ne s'intéressera qu'au mouvement des électrons, dont la densité est $n = 10^{11} \text{ m}^{-3}$. Une onde plane progressive harmonique (de fréquence $f = 300 \text{ MHz}$) se propage avec un vecteur d'onde \vec{k} parallèle à (z) . L'onde traverse l'ionosphère sur une distance $L = 100 \text{ km}$ et on considère que dans l'ionosphère, il existe un champ magnétique constant parallèle à (z) de $40 \mu\text{T}$.



Q1 – Écrire le champ électrique de l'onde EM incidente en fonction des données du problème en supposant qu'elle est polarisée rectilignement comme sur la figure ci-dessus.

Q2 – Écrire les équations du mouvement permettant de déterminer le vecteur vitesse \vec{v} d'un électron du plasma soumis à l'action de l'onde EM incidente et du champ magnétique \vec{B}_0 . On explicitera en particulier les actions (forces et/ou moments etc) auxquelles il est soumis.

Q3 – Justifier que l'on recherche une solution harmonique pour la vitesse \vec{v} de cet électron. Effectuer la projection des équations du mouvement et montrer que l'on obtient le système suivant :

$$im\omega v_x = -eE_x - ev_y B_0.$$

$$im\omega v_y = -eE_y + ev_x B_0.$$

Q4 – Donner l'expression de la densité volumique de courant des électrons.

Q5 – Établir l'expression de propagation de l'onde EM dans le plasma. On justifiera clairement la démarche employée et les équations utilisées.

Q6 – En déduire que les composantes E_x et E_y du champ électrique de l'onde dans le plasma vérifient le système de 2 équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} \alpha E_x + i\beta E_y &= 0. \\ \alpha E_y - i\beta E_x &= 0. \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \alpha &= k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\mu_0 n e^2 \omega^2 m}{m^2 \omega^2 - e^2 B_0^2} \\ \beta &= \frac{\mu_0 n e^3 \omega B_0}{m^2 \omega^2 - e^2 B_0^2} \end{aligned}$$

Q7 – Trouver dans quels cas le système d'équations admet des solutions non nulles.

Q8 – Trouver la relation de dispersion dans chacun de ces cas.

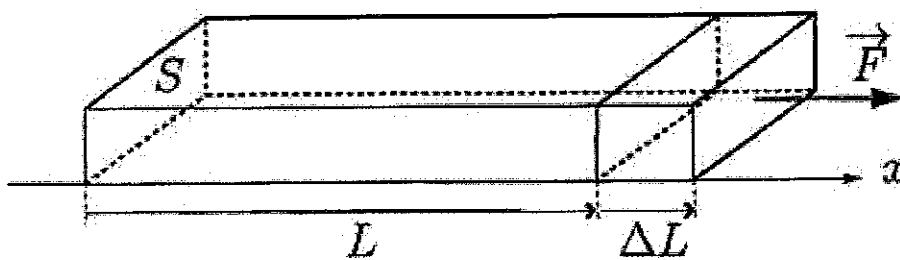
Exercice 2 : Ondes sismiques et sismographe

L'énergie libérée par un séisme se propage à partir du foyer sous forme d'ondes sismiques pouvant se réfléchir ou se réfracter sur des discontinuités de la structure interne de la Terre. Les ondes se propageant dans le volume sont de deux natures : ondes de compression longitudinales (appelées ondes P) et ondes de cisaillement transverses (ondes S). Les ondes P se propagent plus rapidement et parviennent donc en premier au niveau des stations sismiques.

Q1 – Définir le caractère "longitudinal" et "transverse" d'une onde. Donner des exemples dans chaque cas.

Q2 – Étude des ondes P. On modélise la Terre comme un milieu élastique. Dans le domaine d'élasticité d'un matériau, une force appliquée F sur un barreau de section S et de longueur L provoque un allongement

ΔL , donné par la loi de Hooke : $F = ES \frac{\Delta L}{L}$, où E est le module d'Young du matériau, comme indiqué sur la figure suivante.



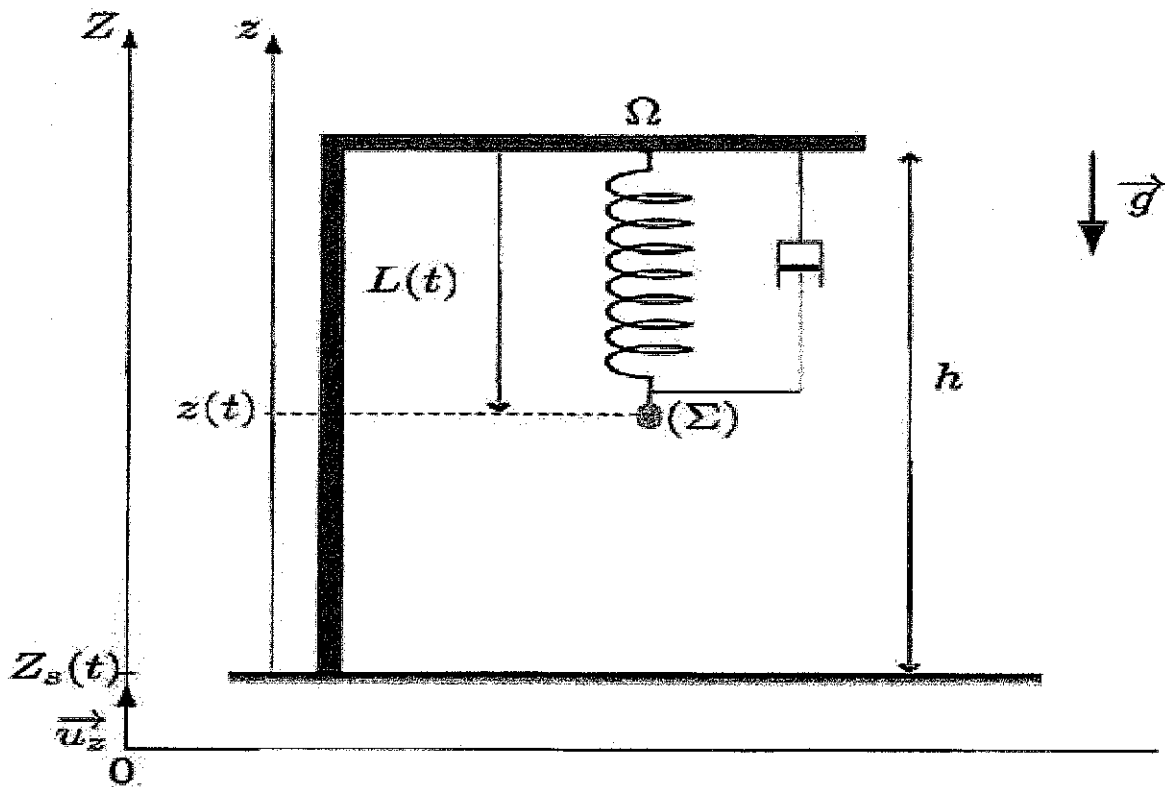
Un plan de section S , lié au barreau, initialement au repos à l'abscisse x , se trouve à l'instant t à l'abscisse $x + \xi(x, t)$ suite à l'arrivée de la perturbation. Exprimer l'allongement de la portion du barreau située initialement entre les plans d'abscisse x et $x + dx$ en fonction d'une dérivée partielle de $\xi(x, t)$ et de dx .

Q3 – L'action mécanique exercée par la portion du barreau située à des abscisses $x' > x$ sur celle située à des abscisses $x' < x$ est modélisée par une force $F(x, t) \vec{u}_x$. Déduire de la question précédente l'expression de $F(x, t)$.

Q4 – Montrer que $\xi(x, t)$ vérifie l'équation : $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ où ρ est la masse volumique du barreau.

La détection des séismes se fait par des sismographes. On étudie un modèle simplifié de sismographe avec le montage ci-dessous montrant un solide (Σ) de masse m suspendu à un ressort dont l'autre extrémité Ω est liée à un bâti rigide solidaire du sol en vibration. Un dispositif d'acquisition permet d'enregistrer le mouvement du solide par rapport au bâti. On souhaite que ce mouvement reproduise le plus fidèlement possible celui du sol par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen. On appelle \mathcal{R}_s le référentiel lié au bâti rigide. Le sol est supposé horizontal et son mouvement vertical, lors d'une secousse sismique, est repéré par la cote $Z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$. Le ressort, de masse négligeable, de constante de raideur k , de longueur au repos L_0 , a pour longueur $L(t)$ à l'instant t . Un amortisseur, relié au ressort, exerce sur le solide une action mécanique modélisée par la force : $\vec{f}_r = -\lambda \vec{v}_{\mathcal{R}_s}(M)$, où $\vec{v}_{\mathcal{R}_s}(M)$ est la vitesse du solide dans le référentiel \mathcal{R}_s .

On note L_1 la longueur du ressort quand le solide est à l'équilibre en l'absence de secousse sismique. Le solide se situe alors à la cote z_1 repérée par rapport au bâti. La position du solide est repérée par : $x(t) = z(t) - z_1$ où $z(t)$ est également repéré par rapport au bâti du sismographe.



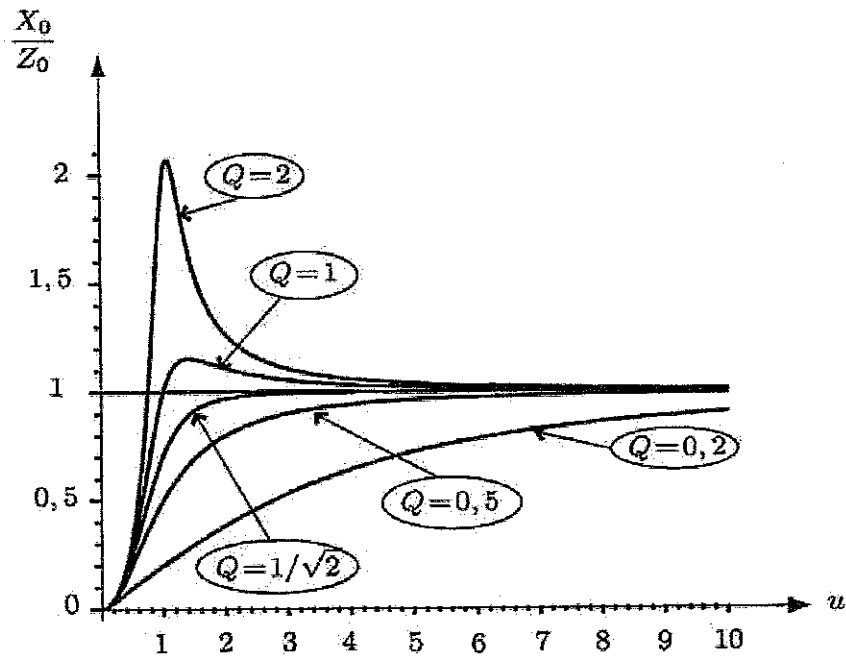
Q5 – Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lors de la secousse sismique. L'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t).$$

Donner les expressions, les significations et les dimensions des grandeurs ω_0 et Q .

Q6 – On cherche la réponse du sismographe sous la forme : $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$ où ϕ est une phase constante. Établir l'expression du rapport X_0/Z_0 en fonction de la variable réduite $u = \omega/\omega_0$.

Q7 – Vérifier que le graphe suivant représente bien les évolutions de X_0/Z_0 en fonction de u , pour différentes valeurs du paramètre Q . Comment qualifier ce filtre ?



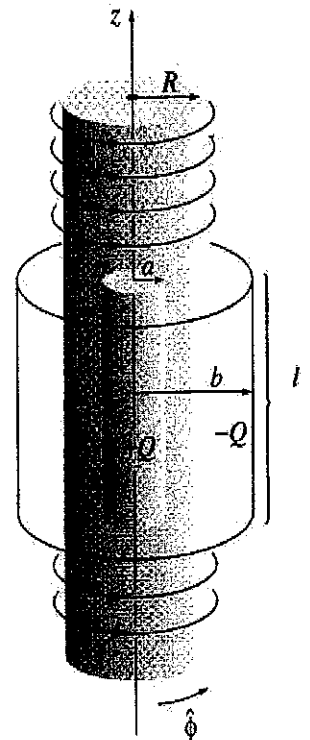
Q8 – On pose $Y = \left(\frac{X_0}{Z_0}\right)^2$ et $\zeta = \frac{1}{u}$. En étudiant la fonction $Y(\zeta)$, montrer qu'il ne peut pas y avoir de résonance si Q est inférieur à une valeur limite Q_0 à déterminer.

Q9 – Comment faut-il choisir la pulsation propre ω_0 du sismographe par rapport à la pulsation ω de la secousse sismique ? Justifier physiquement ce choix. Quel est le meilleur choix du paramètre Q , en termes de fidélité de la réponse et de durée du régime transitoire ?

Exercice 3 – Moment cinétique du champ électromagnétique

On considère un solénoïde infiniment long, de rayon R , avec n spires par unité de longueur et un courant I . Ce solénoïde est entouré de deux cylindres de longueur l . Le premier, à l'intérieur du solénoïde, a un rayon a et porte une charge $+Q$ uniformément distribuée sur sa surface. Le second, à l'extérieur du solénoïde, a un rayon b et porte une charge $-Q$ uniformément distribuée en surface. On a donc $a < R < b$. On définit 4 régions distinctes :

1. la région interne ($r < a$)
2. la région intermédiaire intérieure ($a < r < R$)
3. la région intermédiaire extérieure ($R < r < b$)
4. la région externe ($b < r$)



Le solénoïde est fixe et les cylindres peuvent tourner (degré de liberté de rotation autour de l'axe z). Initialement, lorsque le courant dans le solénoïde garde une valeur I constante, l'ensemble du système est immobile. Lorsqu'on diminue la valeur de ce courant on constate que les cylindres se mettent à tourner.

Q1 – Expliquer *qualitativement* l'origine de ce mouvement. En particulier indiquer où se trouve stocké le moment cinétique *avant* que les cylindres ne se mettent à tourner.

Q2 – Calculer le champ magnétique créé par le solénoïde dans les différentes régions du problème.

Q3 – Calculer le champ électrique créé par les cylindres chargés dans les différentes régions du problème.

Q4 – Montrer que la densité volumique de moment cinétique définie par : $\vec{l} = \vec{r} \wedge (\epsilon_0(\vec{E} \wedge \vec{B}))$, vaut initialement :

$$\vec{l} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \vec{e}_z$$

Q5 – En déduire que le moment cinétique total, intégré sur un volume utile que l'on précisera, vaut :

$$\vec{L} = -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \vec{e}_z$$

Q6 – Montrer que la coupure progressive du champ magnétique est à l'origine d'un champ électrique ortho-radial (suivant la direction $\hat{\phi}$ du schéma) proportionnel à la variation temporelle de l'intensité : $\frac{dI}{dt}$.

Q7 – Calculer ce champ électrique dans les régions intérieure et extérieure au solénoïde ($r > R$ et $r < R$). Quelle est l'action mécanique de ce champ sur les cylindres ?

Q8 – Montrer que le moment cinétique gagné par le cylindre intérieur vaut : $\vec{L}_a = \frac{1}{2} \mu_0 n I Q a^2 \vec{e}_z$ et que celui gagné par le cylindre extérieur vaut : $\vec{L} = -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q R^2 \vec{e}_z$. Conclure.