Épreuves orales de Mathématiques 1 et 2, Filière MP

Les paragraphes suivants rassemblent les impressions qu'ont laissées aux examinateurs de mathématiques les oraux de l'édition 2022 du concours.

Les examinateurs espèrent que les candidats malheureux de cette année trouveront dans ce rapport un début d'explication pour leur échec et que sa lecture permettra aux candidats du concours de 2023 d'aborder les oraux dans de bonnes conditions.

Donnons d'abord quelques statistiques.

Épreuves orales de Mathématiques 1 : La moyenne des notes des 355 candidats français est de 11,79 avec un écart-type de 3,00. La moyenne des notes des 73 candidats internationaux est de 11,77 avec un écart-type de 2,76.

Épreuves orales de Mathématiques 2 : La moyenne des notes des 355 candidats français est de 11,68 avec un écart-type de 3,23. La moyenne des notes des 73 candidats internationaux est de 11,68 avec un écart-type de 2,93.

Depuis la session 2015, les nouveaux programmes sont appliqués lors des oraux du concours. Il est important de rappeler que l'épreuve orale porte sur l'ensemble du programme, y compris la théorie des probabilités ou les fonctions de plusieurs variables. Bien évidemment les exercices sont minutieusement conçus pour que seuls les théorèmes du programme suffisent à leur résolution.

L'oral de mathématiques doit permettre à l'examinateur d'évaluer la compréhension qu'a le candidat des concepts et méthodes fondamentaux du programme de mathématiques.

Pendant l'interrogation, l'autonomie du candidat est particulièrement importante. L'examinateur apprécie la capacité de ce dernier à aller de l'avant, ainsi que son aptitude à imaginer des stratégies et à faire preuve d'agilité technique. Les candidats doivent prendre l'initiative, proposer un plan d'attaque ou, si le problème semble difficile, tester l'énoncé sur des cas particuliers et éventuellement dessiner des figures pour donner forme à son intuition, ce qui peut s'avérer utile même hors du cas évident d'un problème de géométrie. Face à un exercice difficile, le candidat est censé réagir de façon cohérente et intelligente en s'inspirant des situations plus communes qu'il a déjà rencontrées, ou de cas particuliers intéressants plus accessibles. L'examinateur peut alors choisir de le laisser développer une stratégie de résolution (si tant est qu'elle soit bien mise en œuvre, quand bien même celle-là ne fût pas la plus efficace), ou au contraire l'aiguiller vers des arguments plus adaptés, dont le développement peut se révéler plus gratifiant.

Un candidat doit donner des réponses claires et directes aux questions posées. Une bonne formulation doit conjuguer clarté, concision et précision. Le candidat doit structurer sa réflexion et formuler avec précision des arguments complets. Il vaut mieux, avant de s'exprimer, faire une courte pause pour rassembler ses idées. Par ailleurs, il faut prendre le temps de la réflexion et ne pas se lancer dans des calculs sans objet.

Mentionnons encore une tendance récente qui nuit au déroulement de la pensée mathématique et à la discussion avec l'examinateur : certains candidats rechignent à écrire des propriétés mathématiques précises au tableau, et parfois même se contentent d'un bavardage en guise de démonstration. Une variante de ce phénomène est la réticence à calculer. Il est tout à l'honneur d'un candidat de réfléchir si un argument abstrait permet de court-circuiter un calcul, mais on s'attend aussi à ce que le candidat sache juger de la pertinence de cette réflexion.

Lorsque l'examinateur dicte l'énoncé de l'exercice, le candidat ne doit pas essayer de le reformuler ou d'utiliser abusivement des abréviations : ceci mène le plus souvent le candidat à écrire une question qui n'est pas celle qui lui a été posée. Le candidat doit écrire au tableau l'énoncé dans les termes exacts dictés par l'examinateur. Ceux-ci ont toujours été choisis par les examinateurs avec soin et précision.

Si les fautes d'orthographe et de grammaire lors de la dictée du ou des exercices ne sont pas prises en compte dans l'évaluation des candidats, elles devraient néanmoins être évitées.

Il arrive aussi que l'examinateur demande qu'un argument soit clarifié, sans pour autant que la stratégie du candidat soit remise en cause : certains candidats surréagissent à ces observations alors que l'examinateur ne voulait qu'infléchir le cours de leur réflexion.

Venons-en enfin aux mathématiques elles-mêmes. Nous avons constaté les manques suivants chez de nombreux candidats :

- *Cours* Le jury a été surpris que l'expression des matrices de transformations géométriques élémentaires posent problème à un grand nombre de candidats. Les examinateurs ont notés des manquements sur des points fondamentaux du cours de certains candidats : caractérisations de l'équivalence entre suites, la convergence uniforme, le théorème des accroissements finis, la manipulation de valeurs absolues, des relations de Chasles ou des relations d'Euler... Toute partie du programme peut faire l'objet d'un exercice, notamment le programme de première année.
- *Dessins* La réticence des candidats à faire le moindre dessin est préoccupante, que ce soit pour guider un raisonnement sur une marche aléatoire, ou autre.
- *Savoir-faire* Les sommes des n premiers entiers et des n premiers carrés doivent être connues sans hésitation. Connaître les démonstrations n'est pas superflu. Les examinateurs attendent que les candidats soient capable de calculer l'aire d'une couronne, de trouver un équivalent de $arctan(x) - \pi/2$ en $+\infty$... on attend aussi que les candidats puissent, sans hésitation, déterminer $2^{n+1} - 2^n$, et, avec des indications, mettre en oeuvre une extraction diagonale pour des suites...
- *Abréviations.* Des candidats utilisent des abréviations au tableau, qui conduisent parfois à des confusions. Par exemple est-ce que v.p. signifie valeur propre ou vecteur propre ?
- *Problèmes de logique.* Il est fâcheux de rencontrer des candidats ne sachant pas exprimer la négation d'une proposition mathématique. Par exemple, le fait qu'une fonction ne tend pas vers 0 à l'infini, ne signifie pas qu'elle admet une limite non-nulle à l'infini. Plusieurs candidats utilisent encore l'ancienne terminologie « analyse/synthèse » et s'y rattachent comme à une bouée de sauvetage, sans pour autant que cela les aide à résoudre le problème posé. Ils prononcent ces mots comme s'ils avaient eu une idée et ceci ne manque pas de laisser les examinateurs perplexes... L'usage de cette terminologie induit d'ailleurs parfois les candidats à commettre des erreurs de logique élémentaire.
- Le jury a remarqué que de nombreux candidats avaient du mal à effectuer des calculs

de plusieurs lignes au tableau sans erreur. On aimerait que les candidats fassent appel à leur intuition pour détecter d'éventuelles erreurs de calculs. Bien que l'on ne s'attende pas à ce que les candidats soient des virtuoses du calcul, on aimerait qu'ils montrent une certaine familiarité avec des opérations élémentaires et sachent par exemple sans erreur
— montrer que la trace d'une matrice nilpotente est nulle, mais que la réciproque est fausse ;
— montrer la continuité d'une application de la forme $X \to \|MX\|$ pour M une matrice et $\|.\|$ une norme ;
— faire des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice, et en connaître l'interprétation matricielle ;
— déterminer la dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire élémentaire ;
— les méthodes classiques pour le calcul de sommes trigonométriques (passage en complexe, arc moitié, ...) ne semblent pas connues par un certain nombre de candidats, y compris de bons candidats.

- L'utilisation des nombres complexes dans des problèmes de géométrie cause chez certains candidats des difficultés surprenantes.

On trouve cependant de très bons candidats échappant à toutes ces critiques. Certains montrent même un enthousiasme rafraîchissant pour ce beau sujet qu'est la mathématique et interagissent de manière constructive avec les examinateurs. Nous espérons que ces quelques conseils (auxquels pourront s'ajouter ceux contenus dans les rapports des années précédentes) permettront d'en augmenter le nombre.

Pour conclure, nous proposons ci-dessous un exemple d'exercice posé lors de la session 2022, accompagné d'éléments de correction et de commentaires.

Il s'agit d'un exercice parmi les plus élémentaires posés à ce concours, mais qui a malheureusement permis de relever des lacunes algébriques et un défaut d'intuition numérique chez certains candidats.

Énoncé

Soit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Trouver le premier chiffre après la virgule et le premier chiffre avant la virgule du développement décimal de α^{2022}.

Commentaires

Résoudre cet exercice se fait naturellement en deux temps : la recherche d'une idée puis sa mise en application. Ici, on s'attend à ce que la première étape soit la plus délicate, même si le jury guide bien sûr, si nécessaire, la personne devant le résoudre, après lui avoir laissé le temps d'une réflexion personnelle. La formule du binôme de Newton, qu'il est naturel de vouloir utiliser, fait apparaître deux blocs : l'un entier, l'autre étant une combinaison linéaire à coefficients entiers de $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$. Algébriquement, la situation est très semblable à celle que l'on aurait en calculant $x = (a + bi)^{2022}$, où $i = \sqrt{-1}$, lorsque a et b sont réels ; dans ce cas, il est clair que $x + y$, où $y = (a - bi)^{2022}$, est un *réel*. L'analogue pour notre problème est le suivant : si $\beta = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, la somme $n = \alpha^{2022} + \beta^{2022}$ est *entière* : d'après la formule du binôme de Newton appliquée à la somme et à la différence de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$, si k est un entier impair, le coefficient de $\sqrt{2}^k\sqrt{3}^{2022-k}$ dans l'expression de n est un multiple entier de $1+(-1)^k = 0$. Bien entendu, il n'est pas nécessaire de constater cette analogie pour penser à introduire β et toute personne à l'écoute du jury aborde la seconde étape avec suffisamment de temps pour la résoudre.

Cependant, même après avoir poussé si nécessaire les candidats à regarder $\alpha^{2022}+\beta^{2022}$, ceux-ci ont souvent peiné à observer que β^{2022} est *très* petit, de sorte que α^{2022} est très légèrement inférieur à l'entier positif n : le premier chiffre après la virgule est donc un 9. Les examinateurs sont bien conscients de l'impact du stress sur la capacité à faire des calculs au tableau, mais entendre que $2 < \sqrt{3} < 3$ ou $\sqrt{2} \sim 1,7$ reste une déception à ce niveau.

Trouver le premier chiffre *avant* la virgule revient à connaître le chiffre des unités de n, c'est-à-dire n modulo 10, ce qui semble malheureusement hors de portée de nombreux candidats. Connaître n modulo 10 revient à le connaître modulo 2 et 5.

Modulo 2, on sait que n est nul : c'est un multiple de $1+(-1)^{2k} = 2$; cf. remarque *supra*.

Modulo 5, on réécrit par exemple n sous la forme $(5+2\sqrt{6})^{1011}+(5-2\sqrt{6})^{1011}$. Dans le développement, seuls les termes $5^k 2^{1011-k}\sqrt{6}^{1011-k}$ avec k *impair* apparaissent. (Les autres apparaissent avec le coefficient $1-(-1)^k$.) Chacun de ces termes est un multiple de 5.

Ainsi, n est un multiple de 10 et

$$\alpha = \cdots 9, 9 \cdots .$$