ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D’ADMISSION 2022

LUNDI 25 AVRIL 2022
08h00 - 12h00

FILIERE MP - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES A (XLSR)

Durée : 4 heures

L’utilisation des calculatrices n’est pas autorisée pour cette épreuve

- Notations et rappels

• Dans tout le problème, p désigne un entier *strictement positif.*

• On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour tous entiers a et b dans $\mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{N} \mid a \leqslant n \leqslant b\ \}$.

On note $\mathfrak{S}_p$ le groupe des permutations de l'ensemble fini $[\![1, p]\!]$ muni de la composition.

On note $\epsilon : \mathfrak{S}_p \to \{-1, +1\}$ l'application signature, définie comme l'unique morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_p, \circ)$ dans $(\{-1, +1\}, \times)$ qui vaut -1 sur toutes les transpositions.

• On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $p \times p$.
Pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{R}^p)^p$, on appelle produit mixte de $(x_1, \ldots, x_p)$ la quantité

$$[x_1, \ldots, x_p] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} x_{\sigma(i),i}$$

où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a noté $x_j = (x_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$. En particulier, si on note $(x_1 | \cdots | x_p)$ la matrice de taille $p \times p$ élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont données par les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$, on a donc l'égalité $[x_1, \ldots, x_p] = \det((x_1 | \cdots | x_p))$ où det est le déterminant usuel.

• Si F et G sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, on dit que $f : F^p \to G$ est p-linéaire alternée si pour tout $u = (u_1, \ldots, u_p) \in F^p$ et tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'application

$$y \mapsto f(u_1, \ldots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, \ldots, u_p)$$

de F dans G est linéaire et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ on a

$$f(u \cdot \sigma) = \epsilon(\sigma) f(u)$$

où $u \cdot \sigma = (u_{\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

On notera $\mathscr{A}_p(F, G)$ l'ensemble des applications p-linéaires alternées de F^p dans G.

• Dans tout le problème, on considère un espace euclidien E de dimension $d \geqslant 1$ muni de son produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$. On note pour $x \in E$, $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ la norme associée.

• Pour tout entier q non nul, et toute famille $(u_1, \ldots, u_q)$ d'éléments de E, $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_q)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_q$.

• Pour tous $u = (u_1, \ldots, u_p)$ et $v = (v_1, \ldots, v_p)$ dans E^p, on note $\mathrm{Gram}(u, v)$, la matrice carrée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$ par

$$\mathrm{Gram}(u, v)_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle .$$

- Partie I

Soient V et V' deux sous-espaces de E de dimension p (on rappelle que $p \geqslant 1$).

(1) (a) Montrer qu'il existe $u_1 \in V$ et $u_1' \in V'$ de norme 1 tels que

$$\langle u_1, u_1' \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V',\ \|a\| = \|a'\| = 1 \}.$$

(b) Étendre ce résultat en montrant qu'il existe une famille $u = (u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de V et une famille $u' = (u_1', \ldots, u_p')$ de vecteurs de V' telles que u et u' soient orthonormées et vérifient les deux conditions suivantes :

(i) Pour $k = 1$, on a

$$\langle u_1, u_1' \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V',\ \|a\| = \|a'\| = 1 \}.$$

(ii) Pour $k \in [\![2, p]\!]$, on a

$$\langle u_k, u_k' \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V',\ \|a\| = \|a'\| = 1,$$
$$\langle a, u_l \rangle = \langle a', u_l' \rangle = 0 \text{ pour tout } l \in [\![1, k-1]\!]\}.$$

(Indication : On pourra construire les vecteurs u_k et u_k' par récurrence sur l'entier k .)

On fixe deux telles familles u et u' dans le reste de la partie I.

(2) Montrer que si $\dim(V \cap V') \geqslant 1$, on a $u_k = u_k'$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant \dim(V \cap V')$.

(3) (a) Montrer que u est une base orthonormée de V.

(b) Montrer que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $u_k' \in \mathrm{Vect}(u_{k+1}, \ldots, u_p)^\perp$.
(Indication : On pourra considérer l'application $t \mapsto u_k(t) = \frac{u_k + t u_l}{\|u_k + t u_l\|}$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $l \in [\![k+1, p]\!]$ ainsi que sa dérivée.)

(c) Montrer que $u_{k+1} \in (\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) + \mathrm{Vect}(u_1', \ldots, u_k'))^\perp$ pour tout k élément de $[\![1, p-1]\!]$.

(d) En déduire que les sous-espaces $W_k = \mathrm{Vect}(u_k, u_k')$ pour $k \in [\![1, p]\!]$ sont orthogonaux deux à deux.

(4) (a) Montrer qu'il existe $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_p \leqslant \pi/2$ tel que $\cos(\theta_k) = \langle u_k, u_k' \rangle$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

(b) Calculer la valeur de $\det(\mathrm{Gram}(u, u'))$ en fonction des $\cos(\theta_k)$.

(c) En déduire que $\det(\mathrm{Gram}(u, u')) \leqslant 1$. Que dire sur V et V' dans le cas d'égalité ?

- Partie II

Pour tout $e \in E^p$, on considère $\Omega_p(e) : E^p \to \mathbb{R}$ définie pour tout $u \in E^p$ par

$$\Omega_p(e)(u) = \det(\mathrm{Gram}(e, u)) .$$

(5) (a) Vérifier que l'application $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto [x_1, \ldots, x_p]$ appartient à $\mathscr{A}_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

(b) Vérifier que si F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et si $f : F \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors $g : F^p \to \mathbb{R}$ définie pour $u = (u_1, \ldots, u_p) \in F^p$ par $g(u) = [f(u_1), \ldots, f(u_p)]$ est un élément de $\mathscr{A}_p(F, \mathbb{R})$.

(6) (a) Montrer que pour tout $e \in E^p$, on a $\Omega_p(e) \in \mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(b) Vérifier que pour tout $(e, u) \in E^p \times E^p$, on a $\Omega_p(e)(u) = \Omega_p(u)(e)$.

(c) Montrer que $\Omega_p \in \mathscr{A}_p(E, \mathscr{A}_p(E, \mathbb{R}))$.

(7) (a) Soient $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $e = (e_1, \ldots, e_p)$ et $e' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ dans E^p vérifiant $e'_i = \sum_{j=1}^{p} M_{ij} e_j$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Montrer que $\Omega_p(e') = \det(M)\Omega_p(e)$.

(b) Soit $e \in E^p$. Montrer que $\Omega_p(e) \neq 0$ si et seulement si e est une famille libre.

(c) Vérifier que $\Omega_p(e)(e) \geqslant 0$ pour toute famille $e \in E^p$.

Dans la suite pour tout $e \in E^p$, on appelle p-volume de e la quantité

$$\mathrm{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = (\det(\mathrm{Gram}(e, e))^{1/2} .$$

(8) (a) Calculer $\mathrm{vol}_p(b)$ lorsque $b = (b_1, \ldots, b_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E.

(b) On suppose ici que $p \geqslant 2$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_p) \in E^p$. On note pr la projection orthogonale sur l'orthogonal de l'espace engendré par la famille $e_2^p = (e_2, \ldots, e_p)$. Montrer que $\mathrm{vol}_p(e) = \|\mathrm{pr}(e_1)\| \mathrm{vol}_{p-1}(e_2^p)$.

(c) Pour toute famille libre $e = (e_1, \ldots, e_p) \in E^p$, montrer que $\mathrm{vol}_p(e) \leqslant \prod_{i=1}^{p} \|e_i\|$ avec égalité si et seulement si e est une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2.

(9) (a) Montrer que si $e \in E^p$ est une famille libre et si $b \in E^p$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(e)$, alors $\mathrm{vol}_p(e) = |\det(P_b^e)|$ où P_b^e est la matrice de passage de b à e i.e. $e_j = \sum_{i=1}^{p} (P_b^e)_{ij} b_i$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

(b) Montrer que pour tous $e, e' \in E^p$, on a $|\Omega_p(e)(e')| \leqslant \mathrm{vol}_p(e)\mathrm{vol}_p(e')$.

- Partie III

Soient $e = (e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de E, p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant d$ et $\mathcal{I}_p = \{\alpha = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant d\}$.
Pour tout $\alpha = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p$, on note $e_\alpha = (e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \in E^p$ et pour tous ω et ω' éléments de $\mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha)\omega'(e_\alpha)\,. \tag{1}$$

(10) (a) Montrer que pour tout $\omega \in \mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$, on a $\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha)\Omega_p(e_\alpha)$.

(b) En déduire que $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$ pour lequel $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est une base orthonormée de $\mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$ et donner la dimension de $\mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(c) Construire dans le cas $p = d - 1$ une isométrie entre $\mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$ et E.

(11) On considère $u, v \in E^p$. Montrer que

$$\Omega_p(u)(v) = \langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle\,.$$

(12) Montrer que le produit scalaire $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ défini par (1) ne dépend que du produit scalaire sur E et non du choix de la base orthonormée e.

- Partie IV

Soit $p \in [\![1, d]\!]$. On définit une relation sur l'ensemble des bases d'un sous-espace V de dimension p de E par : e et e' sont en relation si $\det_e(e') > 0$ où $\det_e(e')$ est le déterminant de e' dans la base e. On admet que cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de V pour laquelle il existe exactement deux classes d'équivalence appelées orientations de V. Un sous-espace orienté est un couple (V, C) où C est une orientation de V.

On note $\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E)$ l'ensemble des sous-espaces orientés de dimension p de E.

(13) (a) Montrer que si e et e' sont deux familles libres de cardinal p de E alors $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires si et seulement si $\mathrm{Vect}(e) = \mathrm{Vect}(e')$.

(b) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel orienté (V, C) de dimension p de E, il existe une unique $\Psi(V, C) \in \mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$ tel que pour tout $e \in C$ on a $\Omega_p(e) = \mathrm{vol}_p(e)\Psi(V, C)$.

(14) On munit $\mathscr{A}_p(E,\mathbb{R})$ du produit scalaire introduit dans la partie III.

   (a) Vérifier que $\Psi : (V,C) \mapsto \Psi(V,C)$ est une injection de $\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E)$ dans la sphère de rayon 1 de $\mathscr{A}_p(E,\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E))$ est une partie compacte de $\mathscr{A}_p(E,\mathbb{R})$.

(15) Montrer que $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p,E))$ est une partie connexe par arcs de $\mathscr{A}_p(E,\mathbb{R})$ si et seulement si $p \leqslant d-1$. *(Indication : On pourra utiliser la question 3d.)*

⋆ ⋆ ⋆