ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2022

LUNDI 25 AVRIL 2022
08h00 - 12h00

FILIERE PC - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XEULS)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Notations

- Si z est un nombre complexe on note $|z|$ son module.
- Si ℓ est un entier strictement positif, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^\ell$ de la norme définie par
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\ell} |x_j|^2}$$
pour $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$.
- On note $\mathbf{M}_\ell(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de taille $\ell \times \ell$ à coefficients complexes.
- Si $A \in \mathbf{M}_\ell(\mathbb{C})$, on désigne par $\sigma(A)$ (le *spectre* de A) l'ensemble des valeurs propres complexes de A, et
$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \sigma(A)\}$$
le *rayon spectral* de A.
- Étant donné un ensemble E, un *point fixe* d'une application $\phi : E \to E$ est un élément x de E tel que $\phi(x) = x$.

Les trois premières parties sont mutuellement indépendantes. La quatrième partie utilise des résultats établis dans la troisième.

Première Partie. Points fixes

1. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Si $\phi : [a,b] \to [a,b]$ est continue, montrer que ϕ possède au moins un point fixe.

2. Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

   $$\sup\{|\phi'(x)|\,;\, x \in \mathbb{R}\} < 1, \tag{1}$$

   montrer que ϕ possède au moins un point fixe (on pourra étudier le signe de $x - \phi(x)$ pour $|x|$ assez grand). Montrer que ce point fixe est unique.

3. Au moyen de la fonction $\psi(x) = \sqrt{1+x^2}$, montrer que dans la question précédente l'hypothèse (1) ne peut pas être remplacée par

   $$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \ |\phi'(x)| < 1.$$

4. Soit ℓ un entier strictement positif. On se donne une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^\ell$ telle que la série $\sum_n \|v_{n+1} - v_n\|$ converge.

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

   (b) Notons v^* la limite de cette suite. Majorer $\|v_n - v^*\|$ au moyen d'un reste de la somme de la série $\sum_n \|v_{n+1} - v_n\|$.

5. Soit ℓ un entier strictement positif. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^\ell$ et soit $\phi : F \to F$ une application. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que

   $$\forall x \in F,\, \forall y \in F, \quad \|\phi(y) - \phi(x)\| \leqslant k\|y - x\|.$$

   (a) On choisit un point $x_0 \in F$. Montrer que la formule $x_{n+1} = \phi(x_n)$ définit une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de F, et que cette suite est convergente dans F.

   (b) En déduire que ϕ possède un unique point fixe dans F.

   (c) Ce point fixe étant noté x^*, majorer $\|x_n - x^*\|$ en fonction de $\|x_0 - x^*\|$.

   (d) Dans ce qui précède, on suppose que

   $$\phi = \underbrace{\theta \circ \cdots \circ \theta}_{m\,\text{fois}},$$

   où $\theta : F \to F$ est une application et $m \geqslant 2$ est un entier. Montrer que θ possède un point fixe, et un seul, dans F.

6. Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante (mais pas nécessairement continue). Montrer que g possède au moins un point fixe. *Indication: on pourra considérer l'ensemble*

$$E = \{x \in [0,1]\,;\, x \leqslant g(x)\}.$$

Deuxième Partie. Matrices contractantes

1. Pour une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$, calculer explicitement les puissances successives T^n pour n entier strictement positif.

2. Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice et soit $\epsilon > 0$ un nombre réel.
   (a) Montrer l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier positif n les valeurs absolues des coefficients de A^n soient majorées par $\alpha(\rho(A)+\epsilon)^n$.
   (b) En déduire l'existence d'un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout entier positif n et tout $x \in \mathbb{C}^2$ on ait
   $$\|A^n x\| \leqslant \beta(\rho(A)+\epsilon)^n \|x\|.$$

3. Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice et soit η un nombre réel strictement positif.
   (a) Pour $x \in \mathbb{C}^2$, montrer que la série
   $$\sum_n (\rho(A)+\eta)^{-n} \|A^n x\|$$
   est convergente.
   On note
   $$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho(A)+\eta)^{-n} \|A^n x\|$$
   la somme de cette série.
   (b) Montrer que $x \mapsto N(x)$ est une norme sur $\mathbb{C}^2$, qui satisfait l'inégalité suivante
   $$\forall x \in \mathbb{C}^2, \quad N(Ax) \leqslant (\rho(A)+\eta)N(x).$$
   (c) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ on ait
   $$\|x\| \leqslant N(x) \leqslant C\,\|x\|.$$

4. (a) Si $B \in \mathbf{M}_\ell(\mathbb{C})$ est diagonalisable, montrer qu'il existe une norme $||\cdot||_B$ sur $\mathbb{C}^\ell$ telle que $||Bx||_B \leqslant \rho(B)||x||_B$ pour tout $x \in \mathbb{C}^\ell$. *Indication: on pourra vérifier que si $P \in \mathbf{GL}_\ell(\mathbb{C})$, alors $x \mapsto \|Px\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^\ell$.*

   (b) Montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ telle que, pour toute norme N sur $\mathbb{C}^2$ il existe $y \in \mathbb{C}^2$ tel que $N(Cy) > \rho(C)N(y)$.

5. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application et soit x^* un point fixe de ϕ. Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\rho(A) < 1$, et soit $M > 0$ un nombre réel. On suppose que ϕ satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|\phi(x) - \phi(x^*) - A(x - x^*)\| \leqslant M\|x - x^*\|^2.$$

   Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $\|x_0 - x^*\| < \varepsilon$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$ (pour $n \geqslant 0$) converge vers x^* quand $n \to +\infty$.

Troisième Partie. Fonctions de deux variables réelles

1. Soient a, b, c, d quatre nombres réels tels que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $[a, b] \times [c, d]$. Soit $h : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

   (a) Montrer l'identité

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = \int_a^b \hat{h}(s_1)\, ds_1,$$

   où $\hat{h}$ est définie par

$$\hat{h}(s_1) = \int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2)\, ds_2.$$

   (b) En déduire qu'il existe un point $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ de $[a, b] \times [c, d]$ tel qu'on ait les deux égalités

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = (b - a)\hat{h}(\bar{s}_1) = (b - a)(d - c)\frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\bar{s}_1, \bar{s}_2).$$

2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On se donne une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est bijective de I sur l'intervalle ouvert $f(I)$.

   On note $g : f(I) \to I$ sa fonction réciproque. Rappeler la valeur de $g'(f(x))$. Exprimer $g''(f(x))$ en fonction des dérivées successives de f en x.

3. On conserve, jusqu'à la fin de cette troisième partie, les hypothèses et la notation de la question précédente. Pour $x, y \in I$ tels que $y \neq x$, on pose

$$H_f(x, y) = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}\,.$$

(a) Montrer que pour tous $x, y \in I$ tels que $y \neq x$ on a

$$H_f(x,y) = x - f(x) \int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))\, d\lambda.$$

(b) En déduire que H_f admet un unique prolongement par continuité à $I \times I$ tout entier. On note encore ce prolongement $H_f : I \times I \to \mathbb{R}$.

(c) Montrer que H_f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \times I$.

(d) Calculer $H_f(x,x)$.

4. On suppose maintenant $0 \in f(I)$ et on note $x^* = g(0)$. Pour $x \in I$ on note I_x l'intervalle fermé d'extrémités x et x^*.

   (a) Soient $x, y \in I$. Montrer qu'il existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in I_x \times I_y$, tel que

   $$H_f(x,y) - x^* = (x - x^*)(y - x^*) \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}).$$

   (b) Calculer

   $$\frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x^*, x^*)$$

   en fonction des dérivées de f.

Quatrième Partie. Méthode de la sécante

Soit I un intervalle ouvert, borné ou non, de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On désire calculer une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$. Pour cela on met en œuvre un procédé itératif appelé *méthode de la sécante*. En voici le principe :

Initialisation. On choisit deux nombres réels $x_0, x_1 \in I$.

Itération. Soit $n \geqslant 1$. On suppose que les valeurs x_k sont bien définies pour $1 \leqslant k \leqslant n$. On considère la droite L_n passant par les points $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$ du plan $\mathbb{R}^2$, avec la convention que L_n est la tangente en $(x_n, f(x_n))$ au graphe de f lorsque $x_n = x_{n-1}$. Si L_n intersecte l'ensemble $\{(x,0) \,|\, x \in I\}$ en un unique point $(x, 0)$ on définit $x_{n+1} = x$ et on poursuit les itérations. Sinon on considère que la méthode a échoué et on arrête l'itération.

1. Illustrer la construction ci-dessus au moyen d'une figure. Lorsque $f' > 0$ sur I, exprimer x_{n+1} en fonction de x_{n-1}, x_n au moyen de la fonction H_f définie dans la question 3 de la troisième partie.

2. Dans cette question, on examine le cas particulier d'une fonction polynomiale du second degré f définie par la formule $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont réels et $\alpha > \beta$. On prend $I =](\alpha+\beta)/2, +\infty[$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $h(x) = \frac{x-\alpha}{x-\beta}$, avec la convention $h(\beta) = \infty$.

   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ montrer qu'on a $|h(x)| < 1$ si et seulement si $x \in I$.

   (b) Expliciter la relation de récurrence satisfaite par la suite $u_n := h(x_n)$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie quels que soient x_0 et x_1 dans I.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et en déduire que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers α.

   (d) Soit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer qu'il existe un nombre réel strictement négatif s tel que

$$x_n - \alpha = O(e^{s\phi^n}).$$

3. On revient au cas général, f étant une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que f s'annule en un point $x^* \in I$, pour lequel $f'(x^*) > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon] \subset I$ et $f' > 0$ sur l'intervalle $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$. On fixe un tel ϵ pour la suite et on définit

$$M = \sup_{(x,y)\in[x^*-\epsilon, x^*+\epsilon]^2} \left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x,y) \right|.$$

   (b) On suppose que $x_{n-1}, x_n \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$. Montrer que

$$|x_{n+1} - x^*| \leqslant M\,|x_{n-1} - x^*| \cdot |x_n - x^*|.$$

   (c) On fixe $\epsilon' \in]0, \epsilon]$ tel que $M\epsilon' < 1$. Montrer que si x_0, x_1 appartiennent à $[x^* - \epsilon', x^* + \epsilon']$ alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et converge vers x^*.