# Concours FUF 2023 – Admission cycle ingénieur École polytechnique

## Mathématiques, épreuve orale mineure

* * *

## Rapport de l'épreuve

* * *

L'objectif principal de ce rapport est de fournir aux futures candidates et candidats, enseignantes et enseignants des indications les plus précises et les plus explicites possibles sur l'épreuve orale de mathématiques mineure. Il s'agit donc de :

- décrire le déroulement de l'épreuve ;
- détailler les critères d'évaluation ;
- donner l'ensemble des sujets posés ;

Nous espérons en effet que cela puisse permettre de forger une meilleure vision de ce qui se passe lors de cet oral, ainsi que d'aider l'ensemble des candidates et candidats, enseignantes et enseignants, pour le préparer.

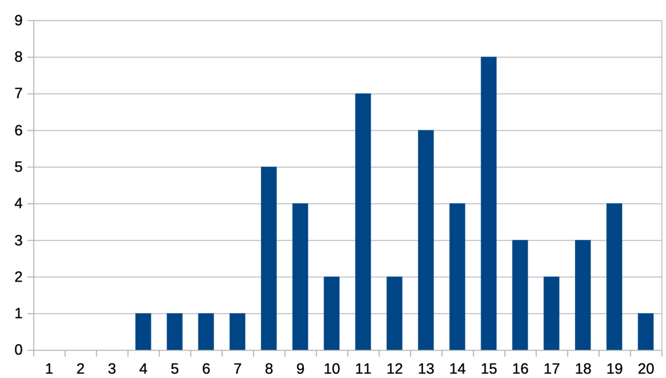


**Figure 1** – Histogramme des notes obtenues à cet oral des 55 candidates et candidats admissibles à l'issue des examens écrites, qui ont passé l'épreuve. La moyenne est de 12.8/20, la médiane de 13/20 et l'écart-type de 3.9.

# Table des matières



# 1 Type d'épreuve

**Format de l'épreuve.** L'épreuve dure 50 minutes au tableau, sans préparation. Elle est passée par tous les candidats et candidates admissibles qui sont inscrites en L3 de spécialité non mathématique. Son programme porte sur le programme de L1-L2 en mathématiques. Elle est notée sur 20, et porte un coefficient 6 (le total des coefficients pour l'ensemble des épreuves est 40).

**Déroulement** Une fois dans la salle d'interrogation, la candidate ou le candidat est invité à signer la feuille d'émargement après vérification de la convocation et d'une pièce d'identité.

Ensuite, le texte suivant, ou une légère variante, était systématiquement dit :

*« Cet oral va durer* 50 *minutes environ. Nous allons réfléchir à un ou plusieurs exercices de difficultés variables. À chaque fois l'exercice n'est qu'un prétexte à la discussion mathématique, et c'est plutôt elle qui compte. C'est normal s'il y a des points délicats ou des difficultés, et arriver à la fin de l'exercice n'est pas l'objectif principal. »*

L'examinateur dicte l'énoncé d'un exercice à recopier au tableau, et l'oral commence. Après quelques moments de réflexion laissés à la candidate ou au candidat, l'examinateur lui demande d'expliquer où en sont ses réflexions. À partir de ce moment-là, le déroulement de l'oral n'est plus uniforme, l'examinateur s'adaptant aux candidates et candidats :

– lorsqu'une piste est explorée, si elle semble intéressante, l'examinateur laisse d'abord faire sans intervention (toujours bienveillant, il ne cherche pas volontairement à piéger) ;

– en cas de blocage, la discussion est amenée d'abord de manière volontairement floue (*Qu'en pensez-vous ?*, *Qu'est-ce qui vous embête ?*, etc.), pour éventuellement ensuite être précisée (une étude d'un cas particulier ou d'une faible dimension peut par exemple être proposée) ;

– tout au long de l'oral, l'examinateur rebondit naturellement sur ce qui est dit par la candidate ou le candidat, et parfois pose des questions additionnelles, souvent en lien avec ce qui est abordé (par exemple pour savoir ce qui se passe si une hypothèse est relâchée, si on peut trouver un exemple vérifiant les conditions de l'énoncé, pour préciser explicitement un résultat du cours utilisé et esquisser sa démonstration, etc.)

Cet exercice « principal » était parfois entièrement traité ou parfois interrompu, auquel cas un exercice plus court était proposé afin d'aborder une autre thématique.

**Exercices posés.** Dans un souci de transparence, l'ensemble des exercices posés figure à la fin de ce rapport. Nous insistons toutefois sur le fait que, dans le contexte de l'épreuve orale, ces sujets ne doivent pas être considérés comme des problèmes écrits, tant la discussion avec l'examinateur est indissociable de l'énoncé.

Les exercices ont été choisis en fonction du critère suivant :

– difficulté très progressive : les exercices portent sur des concepts ou objets fondamentaux du programme, ce qui permet d'évaluer la connaissance du cours, et nécessitent de mettre en oeuvre des raisonnements avec parfois plusieurs étapes, ce qui permet d'évaluer l'autonomie, la réactivité et le potentiel.

Insistons sur le fait que l'objectif principal n'est pas nécessairement d'arriver au bout de l'exercice, et que la note finale n'est ni une fonction croissante, ni une fonction simple, de l'avancement de l'exercice (voir Section 2 pour davantage de précisions). En deux mots, on pourrait dire qu'il est attendu que les candidates et candidats cherchent et explorent avec curiosité afin de comprendre et d'avancer vers une solution, sans forcément la trouver à la fin de l'oral, en montrant la maîtrise de leur cours.

Chaque exercice a été donné au maximum deux fois à la suite. Si besoin est, précisons qu'au moment de l'oral l'examinateur n'a accès ni au dossier, ni à l'université de provenance de la candidate ou du candidat.

# 2 Choix des critères d'évaluation

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la maîtrise des notions que les candidates et candidats manipulent, ainsi que leur potentiel. Insistons sur ce dernier aspect : le jury est pleinement conscient qu'il n'intérroge pas des spécialistes en mathématiques, et ne s'attend pas à une aisance aussi développée que chez des étudiants et étudiantes spécialisées en mathématiques. Il essaye surtout d'évaluer le potentiel des candidates et candidats à suivre à l'École polytechnique un enseignement scientifique à la fois pluridiscplinaire et exigeant.

**Critères choisis.** À cet effet, plusieurs critères ont été définis :

– maîtrise du cours ;
– capacité à se rendre compte des incohérences et à se corriger ;
– autonomie ;
– réactivité aux indications,

qui permettait d'obtenir une note « théorique » sur 20 servant d'indicateur (de comparaison et de justesse) pour la note finale sur 20, issue des ressentis lors de l'oral. Ce choix de critères vise à de valoriser une diversité de qualités requises pour suivre une scolarité à l'École polytechnique, utiliser ou faire des mathématiques, avec succès.

Ainsi, venir à bout de l'exercice n'est pas l'objectif principal, et il n'y a pas une unique manière d'obtenir une bonne note. Insistons sur le fait que la note est fonction des ressentis et des critères que nous avons choisis, et reflète la performance durant un oral de 50 minutes : elle n'est en aucun cas un jugement de valeur objectif (qui n'a pas vraiment de sens) sur la qualité d'une ou d'un candidat. Précisons aussi que ces choix n'engagent que le jury actuel, et peuvent évoluer à l'avenir.

Voir la Figure 1 pour l'histogramme des notes obtenues à cet oral des 55 candidates et candidats admissibles qui ont passé l'épreuve. La moyenne est de 12.8/20, la médiane de 13/20 et l'écart-type de 3.9.

**Précisions sur les critères.** Détaillons de manière plus précise les attentes du jury par rapport aux critères évoqués précédemment.

- Maîtrise du cours. La connaissance et la maîtrise des résultats et des démonstrations du programme est *fondamentale*. Souvent, à un moment lors de l'oral, l'examinateur demande de détailler une étape du raisonnement jusqu'à isoler un résultat du cours, dont l'énoncé peut être demandé à être explicitement écrit au tableau et dont la preuve peut également être demandée. Le fait de poser des questions de cours est quasi-systématique, et n'augure en rien un oral réussi ou non.
- Capacité à se rendre compte des incohérences et à se corriger. Une erreur (non grossière) en tant que telle n'est pas pénalisée (l'examinateur est conscient de la difficulté de l'épreuve sans préparation et des impacts du stress). La candidate ou le candidat se rend parfois compte seul de l'erreur et corrige (ce qui est positif), sinon l'examinateur est amené à l'aider en ce sens, et c'est sa réaction qui est évaluée. Le cas échéant, l'examinateur s'attend à ce que la candidate ou le candidat trouve précisément l'endroit où l'erreur a été commise, en fasse éventuellement une analyse rapide (se rende compte par exemple qu'une hypothèse supplémentaire était peut-être implicitement supposée, ou donne un contre-exemple, etc.) puis se corrige.
- Autonomie. Une des premières étapes de recherche de la quasi-totalité des exercices posés passe par des applications proches du cours (si ce n'est pas le cas, l'examinateur posera à un moment ou autre des questions de ce type). La maîtrise des techniques très proches du cours est ainsi évaluée. L'examinateur évalue les réactions des candidates et des candidats dans le contexte d'une situation mathématique nouvelle, en particulier leur autonomie et leur prise d'initiative. Il s'agit idéalement, après un temps de réflexion, de pouvoir esquisser une ou plusieurs pistes ou stratégies et d'évaluer leur pertinence (quitte à se lancer dans une piste et se rendre compte finalement qu'elle n'aboutit peut-être pas).
- Réactivité dans la discussion. La capacité à avoir un dialogue mathématique, en comprenant et en réagissant aux remarques de l'examinateur, est évaluée. En particulier, il est préférable d'être ouvert aux conseils de l'examinateur, sans chercher son acquiescement.

Il est important de réaliser que la perception qu'a la candidate ou le candidat de l'oral et pendant l'oral est souvent très imparfaite : comme dit explicitement au début de l'oral, c'est normal s'il y a des points délicats et nous encourageons les candidates et candidats à rester concentrés et motivés jusqu'au bout de l'oral (il est tout à fait possible d'obtenir une très bonne note en ayant bloqué au tout début).

Enfin, mentionnons qu'il est bien sûr agréable pour le jury d'avoir en face de lui des candidates et candidats qui sont à l'aise à l'oral, qui prennent la parole et qui expliquent par eux-mêmes l'état de leurs réflexions. Mais l'attitude des candidates et candidats qui pourraient être stressés ou réservés en début d'oral n'est absolument pas pénalisée : le jury, toujours bienveillant, essaye de les mettre en confiance pour qu'ils puissent également exprimer toutes leurs qualités.

Nous avons choisi les critères établis au-dessus dans le choix des sujets afin de pouvoir évaluer au mieux les candidates et candidats compte tenu de la vocation de l'École polytechnique (voir en particulier Section 2 pour les critères d'évaluation) :

L'École polytechnique a pour mission de donner à ses élèves une culture scientifique et générale les rendant aptes à occuper, après formation spécialisée, des emplois de haute qualification ou de responsabilité à caractère scientifique, technique ou économique, dans les corps civils et militaires de l'État et dans les services publics et, de façon plus générale, dans l'ensemble des activités de la nation.
*(Article L675-1 - Code de l'éducation)*

**Quelques conseils concernant l'épreuve.** Les candidates et candidats que nous avons interrogés sont globalement bien préparés à l'épreuve. Nous donnons ici quelques conseils généraux, que nous espérons constructifs, compte tenu du format de l'épreuve.

- Un certain nombre de candidats et de candidates prennent la parole sitôt l'exercice recopié et engagent la discussion avec l'examinateur, puis pendant l'oral réfléchissent à voix haute sans laisser aucun blanc. Cette attitude ne nous semble pas bien adaptée à cette épreuve : en effet, si, en tant que telle, elle n'est bien entendu ni pénalisée ni valorisée, nous avons constaté que ces candidates et candidats ont souvent tendance à proposer une succession de pistes différentes à la chaîne, ne prenant pas le temps de la réflexion, cherchant l'acquiescement de l'examinateur et commettant des erreurs sans les corriger, ce qui finalement les dessert. Le fait que le silence s'installe pendant quelques minutes n'est en aucun cas un problème, bien au contraire. Inversement, plusieurs candidates et candidats restent muets aux sollicitations de l'examinateur (de type *Qu'est-ce que vous embête ? Qu'est-ce qui vous bloque ?*), rendant la discussion délicate, ce qui finalement les dessert aussi. Il s'agit donc de trouver un équilibre permettant une réflexion et une discussion optimales.
- Dans le feu de la discussion, un nombre non négligeable de candidates et de candidats sont débloqués et concluent la résolution de l'exercice trop rapidement à l'oral, en passant trop rapidement sur des points délicats ou en faisant des erreurs. Il ne faut pas hésiter à prendre le temps de la réflexion ou le temps de détailler le raisonnement au tableau. De même, lorsque des calculs assez poussés apparaissent, il vaut mieux éviter de se précipiter et d'effectuer régulièrement des vérifications de cohérence (par exemple, si une sommation $\sum_{i=1}^{n}$ intervient, on peut vérifier que pour $i = 1$ et $i = n$ tout est cohérent).

– Certaines parties du raisonnement peuvent faire penser (parfois à juste titre, parfois non) à des situations déjà rencontrées. Il faut alors faire attention à ne pas se précipiter en utilisant des demi-souvenirs qui ne sont en fait pas adaptés.
– La gestion du tableau est globalement bien maîtrisée. L'idéal est d'écrire l'énoncé de l'exercice en haut à gauche, en laissant suffisamment de place disponible. Plus généralement, il s'agit de trouver un compromis entre un brouillon et une copie, de sorte que les grandes étapes du raisonnement puissent être accessibles simplement en regardant le tableau. En particulier, on s'attend à ce que les éléments essentiels de logique s'y retrouvent (introduction des variables, quantificateurs, etc.). Enfin, nous déconseillons aux candidates et candidats d'effacer intempestivement des éléments partiels corrects alors qu'il reste de la place disponible (ils pourraient servir, on ne sait jamais !).

**Quelques conseils, à destination des candidates et candidats.** Il n'y a bien sûr pas de « recette miracle » permettant la résolution d'exercices de mathématiques. Donnons toutefois quelques conseils qui pourraient être utiles (indépendamment des résultats aux concours !) :
– la connaissance du cours est fondamentale, ainsi qu'une petite technicité calculatoire ;
– pour débuter la recherche d'exercices, en fonction des sujets, il est souvent judicieux de commencer par des cas particuliers, d'ajouter éventuellement une hypothèse, de faire un dessin, etc. ;
– dans le cadre d'un travail individuel, en abordant un exercice , il nous semble préférable de prendre le temps de le chercher, et, avant de regarder sa solution, faire le bilan des différentes tentatives. Après avoir regardé la solution, il peut être profitable de procéder à une sorte de rétro-ingénierie en se demandant dans quelle mesure la solution pourrait être «  naturelle » en décortiquant la succession des idées sous-jacentes.

* * *

# 3 Exercices posés

Dans le contexte de l'épreuve orale, nous insistons sur le fait que ces sujets ne doivent pas être considérés comme des problèmes écrits, tant la discussion avec l'examinateur est indissociable de l'énoncé.

* * *

**Exercice 1.** Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = u_1 = a$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_{n-1}}$ pour $n \geqslant 1$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

**Exercice 2.** Soit $a > 2$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ pour $n \geqslant 0$.

(1) Soit $g(x) = 2\sqrt{x-1} - x$ pour $x \geqslant 1$. Étudier le signe de $g$.

(2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

(3) On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

**Exercice 3.** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $u^k$ est l'endomorphisme nul. Soit $S$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

– pour tout $x \in S$, $u(x) \in S$;

– $\mathbb{R}^n = S + \mathrm{Im}\, u$.

Montrer que $S = \mathbb{R}^n$.

**Exercice 4.** Soient $A, B$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA = 0$ et que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^2)$.

(2) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A) \oplus \mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{R}^n$.

(3) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\, A + \mathrm{Ker}\, B) = n$.

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A+B) = \mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B)$.

(5) Montrer que $\mathrm{rg}(A+B) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.

**Exercice 5.** Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = 2u_n^2$ pour $n \geqslant 1$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

**Exercice 6.** Trouver le noyau de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7.** Soit $n \geqslant 1$ un entier et soient $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose

$$m_n = \min(X_1, \dots, X_n), \qquad M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

(1) Déterminer la loi de $m_n$.

(2) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\mathbb{P}\left(1 - \varepsilon < \frac{M_n}{\ln(n)} < 1 + \varepsilon\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

(3) Que dire de $m_n$ quand $n \to \infty$ ?

**Exercice 8.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \max(x, t)\, dx$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(1) On définit la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ par $a_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$a_{n+1} = f(a_n).$$

Étudier la convergence de la suite $(a_n)$.

(2) La fonction $f$ est-elle de classe $C^\infty$ ?

**Exercice 9.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ deux endomorphismes. On suppose que $g \circ f$ est un projecteur de rang $p$.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leqslant p$.

(2) Montrer que $\mathrm{Im}\, g \circ f = \mathrm{Im}\, g$ et que $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.

(3) Montrer que $g(f(g(x))) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

(4) Montrer que $f \circ g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

**Exercice 10.** Coupez votre craie en deux. En moyenne, quelle est la longueur du plus petit bout ?

**Exercice 11.** Soit $n \geqslant 1$. On définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^{n+1} - x^n - 1$.

(1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, qu'on note $x_n$. Montrer que $1 \leqslant x_n \leqslant 2$.

(2) Étudier la convergence de la suite $(x_n)$.

(3) On pose $y_n = x_n - 1$. Étudier la convergence de la suite $n y_n$ lorsque $n \to \infty$.

**Exercice 12.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{rg}(I_n + A) + \mathrm{rg}(I_n - A) = n$, où $I_n$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(I_n + A)$ et $\mathrm{Ker}\,(I_n - A)$ sont en somme directe.

(2) Montrer que $A^2 = I_n$.

**Exercice 13.** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui n'est pas la fonction nulle. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant M|f(x)|$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(1) Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x)^2 e^{-2Mx}$. Montrer que $g$ est décroissante.

(2) Montrer que $f$ ne s'annule pas.

**Exercice 14.** Pour un entier $n \geqslant 2$, on note $a_n$ le nombre de manières de lancer successivement une pièce $n$ fois pour qu'un nombre impair de piles suivi d'un face survient pour la première fois au bout de $n$ lancers.

(1) Calculer $a_2, a_3, a_4, a_5$.

(2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

(3) Trouver une constante $c < 2$ telle que $a_n \leqslant c^n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

Soit $M$ le nombre de fois qu'il faut, en moyenne, lancer une pièce en l'air pour observer une suite d'un nombre impair de piles, suivi d'un face.

(4) Montrer que $M < \infty$.

**Exercice 15.** Soient $E, F, G$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que :

(1) $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(f) \iff \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$.

(2) $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g) \iff \mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Im}\,(f) = F$.

**Exercice 16.** Soit $n \geqslant 1$ un entier et $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose

$$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

(1) Montrer que $M_n$ admet une densité, qu'on déterminera et qu'on représentera graphiquement.

(2) Montrer que $\mathbb{E}\,(M_n) = \int_0^\infty \mathbb{P}\,(M_n \geqslant u)\, du$

(3) Trouver un équivalent de $\mathbb{E}\,(M_n)$ quand $n \to \infty$.

**Exercice 17.** Soient $p, q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ deux projecteurs. On note $\mathsf{Id}$ l'application identité entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $p(x) = q(x)$.

(1) Calculer $(\mathsf{Id} - p \circ q) \circ p(x)$.

(2) Calculer $(p + q) \circ (\mathsf{Id} - p)(x)$.

(3) On suppose que $p + q$ et $\mathsf{Id} - p \circ q$ sont inversibles. Montrer que $p - q$ est inversible.

**Exercice 18.** Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels tels que $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

(1) Montrer que $x_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$

(2) Montrer que $x_n$ converge vers une limite qu'on déterminera.

**Exercice 19.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à coefficients positifs ou nuls. On s'intéresse à la série $\sum u_n w_n$.

(1) On prend $u_n = \frac{1}{n^3}$. Donner un exemple de suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n w_n$ converge, et un exemple où cette série diverge.

(2) On suppose que la série $\sum u_n$ converge et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que la série $\sum u_n w_n$ converge.

(3) On suppose que pour toute suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série $\sum u_n w_n$ converge. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

(4) On suppose que $\sum u_n$ converge. Que se passe t-il lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n$ ?

(5) On suppoer que les séries de terme général $u_n^2$ et $w_n^2$ convergent. Montrer que la série $\sum u_n w_n$ converge.

**Exercice 20.** Soit $n \geqslant 2$ un entier et $p_n \in ]0,1[$. On construit au hasard des arêtes entre les entiers $1, 2, \dots, n$ comme suit : pour $i \neq j$, avec probabilité $p_n$ on place une arête entre $i$ et $j$, et avec probabilité $1 - p_n$ on ne place pas d'arête entre $i$ et $j$ (on fait cela indépendamment pour toutes les paires $\{i, j\}$ avec $i \neq j$ ). Le but de cet exercice est d'estimer la probabilité qu'il existe un sommet isolé (c'est-à-dire sans voisins). Notons $S_n$ le nombre de sommets isolés.

(1) Calculer $\mathbb{E}[S_n] = n(1-p_n)^{n-1}$.

(2) Lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 1$, montrer que $\mathbb{P}(S_n \geqslant 1) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Le but est maintenant de démontrer que lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c < 1$, alors $\mathbb{P}(S_n = 0) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Soit $Y$ une variable aléatoire positive ayant un moment d'ordre 2 fini. En notant $\mathsf{Var}(Y)$ la variance de $Y$, montrer que

$$\mathbb{P}(Y = 0) \leqslant \frac{\mathsf{Var}(Y)}{\mathbb{E}[Y]^2}.$$

(4) Calculer $\mathbb{E}[S_n^2]$.

(5) Conclure que lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c < 1$, on a $\mathbb{P}(S_n = 0) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

**Exercice 21.** Pour $n \geqslant 1$, on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}dx.$$

(1) Trouver la limite de $I_n$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $|I_n - J_n| \leqslant \frac{1}{2n^2}$.

(3) Calculer $J_n$ pour $n \geqslant 1$.

(4) En déduire un équivalent simple de $I_n$ lorsque $n \to \infty$.

**Exercice 22.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n$, il existe un unique réel, que l'on notera $x_n$, vérifiant $f_n(x_n) = 0$.

(1) Si $(f_n)$ converge uniformément vers une fonction $f$, montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = 0$.

(2) Le réel $a$ de la question précédente est-il forcément unique ?

**Exercice 23.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombre réels tels que $u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$ pour tous entiers $m, n \geqslant 1$. On pose

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{u_k}{k}.$$

(1) Montrer que $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et que $\ell$ est bien défini.

(2) Montrer que $u_{mn} \leqslant m u_n$ pour tous entiers $m, n \geqslant 1$.

(3) On suppose dans cette question que $\ell \in \mathbb{R}$ et on fixe $\varepsilon > 0$.

  (a) Justifier qu'on peut trouver un entier $m \geqslant 1$ tel que $\frac{u_m}{m} \leqslant \ell + \varepsilon$.

  (b) Montrer que $\frac{u_n}{n} \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

**Exercice 24.** Soit $n \geqslant 3$ un entier. Une urne contient $n$ pièces équilibrées. $n-1$ d'entre elles sont normales : elles possèdent une face "face" et une face "pile". La dernière, truquée, possède deux faces "face". On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers sucessifs de cette pièce.

(1) Quelle est la probabilité qu'on obtienne "face" pendant les $n$ premiers lancers ?

(2) Sachant que l'on a obtenu "face" pour les $n$ premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ? Quelle est la limite de cette probabilité quand $n$ tend vers l'infini ?

**Exercice 25.** Soit $f : E \to E$ une application linéaire avec $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$

(2) $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$

(3) $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$

(4) $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$

**Exercice 26.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$.

(1) On suppose qu'il existe un projecteur $p$ tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

  (a) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Ker}\, p$ on a $u(x) \in \mathrm{Im}\, p$.

  (b) Montrer que $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$.

  (c) Montrer que $u \circ u = 0$.

  (d) Est-ce que $u$ est inversible ? diagonalisable ?

(2) On suppose que $u \circ u = 0$. Montrer qu'il existe un projecteur $p$ tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

**Exercice 27.** Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. On pose
$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

(1) Calculer $\mathbb{P}(Y_n > 0)$ et déterminer sa limite lorsque $n \to \infty$.

(2) Calculer la limite de $\mathbb{P}(Y_n = 1)$ lorsque $n \to \infty$

(3) Pour $k \geqslant 1$, calculer la limite de $\mathbb{P}(Y_n = k)$ lorsque $n \to \infty$.

(4) Montrer que pour tout $a > 1/2$,
$$\mathbb{P}(Y_n \geqslant (an)^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(5) Montrer que pour tout $a \in (0, 1/2)$,
$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant (an)^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**Exercice 28.** Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = u_1 = a$ et $u_{n+1} = 2(u_{n-1})^2$ pour $n \geqslant 1$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

**Exercice 29.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire. Montrer que $f$ est nilpotent non nul si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$

**Exercice 30.** Soit $n \geqslant 2$ un entier. Deux urnes $U$ et $V$ contiennent chacune $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire une boule de $U$ et une boule de $V$, et on note les numéros respectifs $X$ et $Y$.

(1) Soit $E_n$ l'événement « le rapport $\frac{X}{Y}$ est un nombre entier ».
  (a) Calculer $\mathbb{P}(E_3)$.
  (b) Calculer $\mathbb{P}(E_4)$.

(2) Trouver une formule pour $\mathbb{P}(E_n)$.

(3) En déduire un équivalent simple de $\mathbb{P}(E_n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

(4) La suite $(\mathbb{P}(E_n))_{n\geqslant 1}$ est-elle monotone ?

**Exercice 31.** Soit $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$. Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f_n(x) = \frac{n}{x} \cdot \left( f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) \right).$$
On suppose que la fonction $x \mapsto x f''(x)$ est bornée.

(1) On fixe $x \geqslant 1$. Quelle est la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$ ?

(2) Exprimer la quantité $f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) - \frac{x}{n} f'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

(3) Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geqslant 1} \left| f_n(x) - f'(x) \right| = 0.$$

**Exercice 32.** Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a $\int_k^{k+1} P(u)du = k$.

**Exercice 33.** Soient $f, g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie vérifiant
$$f^2 + f \circ g = \mathrm{Id}_E$$
Montrer que $f$ et $g$ commutent.

**Exercice 34.** On définit la suite $(u_n)$ par $u_1 > 0$ et pour $n \geqslant 1$
$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

(1) Montrer que $(u_n)$ converge.

(2) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ ?

(3) Montrer que $u_n = \frac{a}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ avec une constante $a$ à déterminer.

**Exercice 35.** Soient $f, g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie vérifiant
$$f^2 + g \circ f = \mathrm{Id}_E$$
Montrer que $f$ et $g$ commutent.

**Exercice 36.** Pour un entier $n \geqslant 3$, on considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation
$$x = n \ln(x).$$

(1) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ?

On note $u_n$ la plus petite solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

(3) On pose $u_n = 1 + v_n$. Trouver un équivalent simple de $v_n$ lorsque $n \to \infty$.

**Exercice 37.** On définit la suite $(u_n)$ par $u_1 > 0$ et
$$u_{n+1} = e^{-u_n/n}.$$

(1) Étudier la convergence de $(u_n)$.

(2) Déterminer un équivalent simple de $1 - u_n$.

**Exercice 38.** Soit $c > 0$. On considère une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels telle que $0 < a_n \leqslant c(a_{2n} + a_{2n+1})$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de $c$ la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ diverge-t-elle toujours ?

**Exercice 39.** Pour $k \geqslant 0$ on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus $k$.

(1) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_k[X]$ ?

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $\Delta : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

(2) Vérifier que $\Delta$ définit une application linéaire.

(3) Montrer que $\Delta$ est surjective.

**Exercice 40.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^3 = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f$ et que $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,(f^2)$.

(2) Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^2) \leqslant n$.

(3) Démontrer que $2\mathrm{rg}(f^2) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.
*Indication.* On pourra considérer l'application linéaire $g : \mathrm{Im}\,(f) \to E$ qui à $x \in \mathrm{Im}\,(f)$ associe $f(x)$.

**Exercice 41.** Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$ si et seulement si il existe $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire telle que $u + v$ soit inversible et $u \circ v = 0$.

**Exercice 42.** Soit $m \geqslant 1$ un entier. On considère une suite de variables aléatoires $(U_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes et de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$. On note

$$J = \min\{i \geqslant 1 : U_i \neq U_{i+1}\}.$$

(1) Trouver la loi de $J$. Est-ce une loi géométrique ?

On considère maintenant une suite $(J_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que $J$. On note

$$M_n = \max(J_1, \ldots, J_n).$$

(2) Calculer la limite de $\mathbb{P}\left(M_{m^k} \leqslant k\right)$ lorsque $k \to \infty$.

**Exercice 43.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p, q$ deux projecteurs de $E$ qui commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p + q = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

**Exercice 44.** Soit $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) pour toute suite $x_n$ telle que $x_n \to x$ on a $f_n(x_n) \to f(x)$ ;

(2) $f$ est continue et $f_n \to f$ uniformément.

**Exercice 45.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombre réels tels que $u_0 > 0$ et pour $n \geqslant 0$ :

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

(1) Étudier la convergence la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(2) Montrer que $u_{n+1}/u_n \to 1$.

(3) Montrer que la suite $u_{n+1} - u_n$ converge.

(4) Trouver un équivalent simple de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

**Exercice 46.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $g(t) = \sup_{[0,t]} f$ est continue.