

ECOLE POLYTECHNIQUE – CYCLE POLYTECHNICIEN EPREUVES D'ADMISSION – ETUDIANTS INTERNATIONAUX

Contenu recommandé des connaissances en sciences mathématiques

Le contenu des connaissances recommandé en sciences mathématiques pour les candidats au concours d'admission « Filière universitaire – Candidats internationaux » est détaillé ci-dessous

Ce document a été rédigé pour donner une indication aux candidats des connaissances sur lesquelles ils sont susceptibles d'être interrogés. Mais l'Ecole Polytechnique se réserve la possibilité de tester les connaissances d'un candidat sur d'autres champs des sciences mathématiques, enseignés en licence de mathématiques, que ceux listés dans ce document

Une bonne maîtrise des mathématiques et des sciences physiques est indispensable pour la réussite des études à l'Ecole Polytechnique.

1 - ALGEBRE

1.1 Théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles, fonctions caractéristiques.
Applications, injectivité, surjectivité, bijectivité.
Image directe, image réciproque d'un ensemble par une application.
Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrement.

1.2 Nombres et structures usuelles

Lois de composition; groupes, anneaux, corps.
Relations d'équivalence, structures quotient
Nombres réels, nombres complexes, exponentielle complexe.
Applications à la géométrie plane
Polynômes, relations entre les coefficients et les racines.
Arithmétique élémentaire (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

1.3 Espaces vectoriels de dimension finie (*)

Familles libres, familles génératrices, bases, dimension
Déterminant de n vecteurs; caractérisation des bases.
Matrices, opérations sur les matrices.
Déterminant d'une matrice carrée; développement par rapport à une ligne ou une colonne; rang, cofacteurs.
Applications linéaires, matrices associées.
Endomorphismes, trace, déterminant, rang d'un endomorphisme.
Systèmes d'équations linéaires.

1.4 Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables

Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée; matrices semblables; interprétation géométrique

Polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton.

Réduction d'un endomorphisme en dimension finie; endomorphismes diagonalisables.

1.5 Espaces euclidiens, géométrie euclidienne

Produit scalaire; inégalité de Cauchy-Schwarz; norme et distance associées.

Espaces euclidiens de dimension finie, bases orthonormales; projections orthogonales.

Groupe orthogonal $O(E)$; symétries orthogonales.

Matrices orthogonales; diagonalisation des matrices symétriques réelles.

Propriétés des endomorphismes orthogonaux de \mathbf{R}^2 et \mathbf{R}^3 .

(*) Dans certains pays l'algèbre linéaire s'étudie exclusivement dans \mathbf{R}^k ou \mathbf{C}^k ; nous conseillons vivement aux candidats concernés de se familiariser avec la théorie des espaces vectoriels abstraits.

2 - ANALYSE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

2.1 Topologie dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

Parties ouvertes, fermées, point adhérent, point intérieur.

Suites convergentes d'éléments d'un espace vectoriel normé, applications continues.

Parties compactes; image par une application continue d'une partie compacte, existence d'extrema.

Équivalence des normes.

2.2 Fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle

Dérivée en un point; applications de classe C^1 , de classe C^k

Inégalité des accroissements finis; formule de Taylor

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Primitive d'une fonction continue.

Fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, fractions rationnelles).

Suites et séries de fonctions, convergence simple, convergence uniforme.

2.3 Intégration sur un intervalle

Intégrale des fonctions continues par morceaux.

Théorème fondamental du calcul intégral (exprimant l'intégrale d'une fonction en terme de sa primitive).

Intégration par parties, changement de variable, intégrales dépendant d'un paramètre.

Continuité sous le signe \int , dérivation sous le signe \int .

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.4 Séries de nombres, séries entières

Séries de nombres réels ou complexes, convergence simple, convergence absolue.

Comparaison entre une série et une intégrale, produit de deux séries absolument convergentes.

Séries entières, rayon de convergence; fonction développable en série entière sur un intervalle.

Développement en série de Taylor de e^t , de $\sin(t)$, de $\cos(t)$, développement de $\ln(1+t)$, de $(1+t)^a$ où a est réel

2.5 Equations différentielles

Equations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2, systèmes fondamentaux de solutions.

Systèmes linéaires à coefficients constants.

Méthode de la variation des constantes.

Notions sur les équations différentielles non linéaires.

2.6 Fonctions de plusieurs variables réelles

Dérivées partielles, différentielle.

Règle de dérivation des fonctions composées.

Applications différentiables de classe C^1 , théorème de Schwarz pour les fonctions de classe C^2 .

Difféomorphismes de classe C^1 , théorème d'inversion locale.

Points critiques, points d'extrema locaux ou globaux.

Courbes planes, tangente, propriétés métriques de courbes planes (longueur d'un arc, courbure), coordonnées polaires.

Surfaces dans \mathbf{R}^3 , plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$.

**ECOLE POLYTECHNIQUE – CYCLE POLYTECHNICIEN
EPREUVES D'ADMISSION – ETUDIANTS INTERNATIONAUX**

**Contenu recommandé des connaissances
en sciences physiques**

Le contenu des connaissances recommandé en sciences physiques pour les candidats au concours d'admission : « Filière universitaire – Candidats internationaux » est détaillé ci-dessous.

Ce document a été rédigé pour donner une indication aux candidats des connaissances sur lesquelles ils sont susceptibles d'être interrogés. Mais l'Ecole Polytechnique se réserve la possibilité de tester les connaissances d'un candidat sur d'autres champs des sciences physiques, enseignés en licence de physique, que ceux listés dans ce document.

L'Ecole s'attend, par ailleurs, à ce que les candidats connaissent les valeurs numériques des constantes fondamentales de la physique, de même que les ordres de grandeur des phénomènes physiques du monde qui nous entoure.

Une bonne maîtrise des mathématiques et des sciences physiques est indispensable pour la réussite des études à l'Ecole Polytechnique.

Constantes physiques

Les valeurs des constantes de Planck, de Boltzmann et d'Avogadro, la charge et la masse de l'électron, la vitesse de la lumière dans le vide, la permittivité et la perméabilité du vide, en système d'unités *SI* (deux chiffres significatifs au moins).

Ordres de grandeur

Les ordres de grandeur du champ magnétique terrestre, du rayon de la Terre, de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, de la concentration des électrons dans un métal typique, de la longueur d'onde d'une onde électromagnétique du spectre visible, de la distance entre deux atomes dans un solide ou un liquide, du rayon de Bohr de l'état fondamental de l'atome de l'hydrogène, de la taille du noyau.

Techniques de calcul indispensables et obligatoires

Maîtrise d'un certain nombre de techniques de calcul obligatoire dont :

Equivalents

Savoir analyser le comportement d'une quantité physique $A(x)$ au voisinage d'une valeur particulière de la variable x . Equivalents usuels pour $x \approx 0$:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}; \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}; \quad \tan x \approx x + \frac{x^3}{3}; \quad \cot g x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}; \quad \ln(1+x) \approx x; \quad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{(\alpha)(\alpha-1)}{2} x^2$$

Dérivées et primitives des fonctions d'une variable

Dérivation des fonctions élémentaires (x^n , $\ln x$, e^x , $\sin x$, $\cos x$, $tg x$, $\cot g x$), de même que d'une fonction composée $f(g(x))$.

Règle de dérivation du produit, du quotient de deux fonctions d'une variable réelle.

Primitives des fonctions élémentaires ci-dessus.

Intégration par parties.

Conditions de convergence d'une intégrale dans les cas d'intervalle d'intégration infini ou de présence de points de discontinuité.

Fonctions de plusieurs variables. Opérateurs différentiels usuels

Différentielle totale.

Dérivées partielles par rapport à une variable d'une fonction de plusieurs variables.

Opérateur nabla $\vec{\nabla}$. Gradient $\vec{\nabla}f$ d'une fonction $f(\mathbf{r})$.

Rotationnel $\vec{\nabla} \times \mathbf{A}$ d'un champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Divergence $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}$. Circulation $\oint_{(C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$.

Laplacien Δf et Laplacien vectoriel $\Delta \mathbf{A}$.

Intégrales multiples. Théorèmes de Stokes, de Gauss-Ostrogradski

Réduction des intégrales multiples à des intégrales simples en utilisant les propriétés de symétrie (cylindrique, sphérique) des intégrands et les surfaces (volumes) impliqués.

Théorème de Stokes.

Théorème de Gauss-Ostrogradski.

Equations différentielles

Résolution des équations différentielles du premier ordre à variables séparables.

Résolution des équations du deuxième ordre, linéaires, homogènes à coefficients constants.

Polynôme caractéristique, nombre et nature des solutions, amortissement critique.

Résolution des équations du deuxième ordre linéaires, à coefficients constants avec second membre (inhomogènes). Notions d'oscillations forcées et de résonance.

Equations aux dérivées partielles

Solution de d'Alembert de l'équation d'onde.

Onde plane progressive monochromatique. Notions de vecteur d'onde, longueur d'onde, fréquence temporelle, période temporelle.

Grandes équations phénoménologiques (lois de Fick, de Fourier, équation de la diffusion).

Bilans (d'énergie, de masse, etc.) dans un volume élémentaire.

Algèbre linéaire

Calcul d'un déterminant, diagonalisation d'une matrice, notions de valeurs propres et de vecteurs propres d'un opérateur linéaire.

Trigonométrie

Définitions et propriétés courantes des fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente, cotangente).

Formules de trigonométrie usuelles ($\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin [(\alpha + \beta) / 2] \cos [(\alpha - \beta) / 2]$; $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos [(\alpha + \beta) / 2] \cos [(\alpha - \beta) / 2]$, etc.).

Série de Fourier pour une fonction périodique suffisamment régulière.

I. Mécanique

Mécanique newtonienne

Lois de Newton : principe d'inertie, principe de l'action et de la réaction, principe fondamental de la dynamique.

Relativité galiléenne. Notions sur les repères non galiléens et les forces dites « d'inertie » (repères à accélération rectiligne et à rotation uniforme, en particulier).

Théorème du moment cinétique. Théorème de l'énergie cinétique. Théorème de l'impulsion.

Systèmes de deux particules. Mouvement à force centrale, états liés, états de diffusion.

Expression de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel en coordonnées polaires cylindriques et sphériques.

Notion d'énergie potentielle. Indépendance du chemin pour le travail d'une force dérivant d'un potentiel.

Conservation de l'énergie mécanique d'un système matériel isolé, dans le cas des forces conservatives.

Conservation du moment cinétique dans le cas de forces centrales. Première et deuxième loi de Kepler (la loi des sections coniques et la loi des aires).

Conservation de l'impulsion, dans le cas d'un système isolé. Chocs élastiques et inélastiques.

Notion de centre de masse d'un système des masses.

Expressions de l'énergie potentielle, cinétique et de l'énergie totale d'une particule, dans le cas d'une trajectoire circulaire.

Mécanique des solides

Solides indéformables. Solide en rotation autour d'un axe. Moment d'inertie d'un solide. Expression de l'énergie cinétique d'un solide comme somme d'un terme de translation de son centre de masse et de l'énergie cinétique des particules le constituant dans le référentiel lié au centre de masse (théorème de Koenig). Problème du pendule pesant.

Statique et mécanique des fluides

Description d'Euler (notion de champ de vitesse) d'un fluide. Notions de densité de courant, de débit massique et de débit volumique. Bilan de masse. L'équation locale de conservation de la masse.

Définitions d'un écoulement stationnaire, d'un écoulement incompressible, d'un écoulement irrotationnel.

Écoulements parfaits : équation d'Euler, relation de Bernoulli pour les écoulements incompressibles et homogènes.

Calcul de la résultante des forces de pression s'exerçant sur un objet, en statique des fluides.

Notion de poussée d'Archimède s'exerçant sur un objet immergé dans un fluide.

Applications de la mécanique

Force de Lorentz (force exercée sur une particule chargée par des champs électrique et magnétique constants). Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique statique et uniforme.

Oscillateurs linéaires, oscillateur harmonique amorti. Oscillations forcées, résonances.

II. ÉLECTRODYNAMIQUE

Tension électrique. Lois de Kirchhoff des nœuds et des mailles. Courant électrique. Loi d'Ohm. Théorème de superposition.

Composants élémentaires des circuits, résistance, condensateur, self (bobine d'induction). Leurs impédances en régime sinusoïdal.

Régime transitoire de charge et décharge d'un condensateur.

Courants et tensions sinusoïdaux. Intensité maximum, intensité efficace. Branchements en série, en parallèle.

Étude des résonances dans les circuits en régime sinusoïdal. Circuit *RLC*. Lien avec les résonances étudiées en mécanique.

III. ÉLECTROMAGNÉTISME

Électrostatique

Loi de Coulomb. Notion de champ électrique. Champ électrostatique \mathbf{E} . Circulation, flux de \mathbf{E} . Théorème de Gauss. Propriétés de symétrie de \mathbf{E} .

Potentiel électrostatique ϕ , équation de Poisson.

Calcul de \mathbf{E} et de ϕ dans le cas d'une distribution de charge ρ simple. Potentiel électrostatique entre les plaques d'un condensateur plan.

Notion de dipôle, champ créé par un dipôle à grande distance de ce dernier, énergie d'interaction d'un dipôle permanent avec un champ électrique. Définition du vecteur polarisation \mathbf{P} .

Champ électrique dans un conducteur à l'équilibre, surfaces équipotentielles.

Champ au voisinage de la surface d'un métal.

Loi de Coulomb entre deux charges plongées dans un diélectrique homogène, linéaire et isotrope.

Magnétostatique

Champ magnétostatique \mathbf{B} . Propriétés de symétrie de \mathbf{B} .

Champ créé par un circuit filiforme parcouru par un courant (loi de Biot - Savart), les deux équations de Maxwell (la divergence de \mathbf{B} et le théorème d'Ampère), potentiel vecteur \mathbf{A} .

Non-unicité du potentiel électrostatique ϕ et du potentiel vecteur \mathbf{A} , unicité des champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} .

Circulation de \mathbf{B} . Lien entre la circulation de \mathbf{B} et les courants enlacés (théorème du courant total).

Calcul de \mathbf{B} créée par des fils rectilignes et des spires circulaires. Champ sur l'axe d'une spire circulaire et d'un solénoïde de section circulaire. Loi de Laplace.

Dipôle magnétique et moment magnétique \mathbf{M} . Expression de l'énergie d'interaction d'un moment magnétique avec un champ magnétique \mathbf{B} .

Flux de \mathbf{B} . Phénomène de l'induction électromagnétique, loi de Faraday, règle de Lenz.

Ondes électromagnétiques

Onde électromagnétiques dans le vide.

Equations de Maxwell dans le vide. Ondes planes progressives harmoniques comme solutions des équations de Maxwell dans le vide. Fréquence, longueur d'onde, vecteur d'onde. Notion de vitesse de phase.

Transversalité des champs électrique et magnétique.

Etat de polarisation d'une onde électromagnétique. Polarisation rectiligne, circulaire.

Densité volumique d'énergie électromagnétique, vecteur de Poynting.

Notion de paquet d'onde. Vitesse de groupe.

Onde électromagnétique dans un milieu matériel (linéaire et isotrope).

Champs \mathbf{E} et \mathbf{B} macroscopiques. Relations constitutives en complément des équations de Maxwell.

Constante diélectrique complexe $\epsilon(\omega)$ dépendant de la fréquence.

Notions d'indice de réfraction complexe, de dispersion et d'absorption.

Modèles microscopiques décrivant la polarisation matérielle du milieu : modèle de Drude, modèle de l'électron élastiquement lié (modèle de Lorentz).

IV. OPTIQUE

Optique géométrique

Notion de rayon lumineux. Réflexion-réfraction par un miroir plan. Lois de Snell-Descartes. Angle limite. Phénomène de réflexion totale.

Miroir sphérique, lentille, relations de conjugaison et de grandissement.

Optique ondulatoire

Réflexion-réfraction d'une onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement à l'interface entre deux diélectriques. Démonstration des lois de Snell-Descartes.

Notion de chemin optique. Interférences non localisées entre deux ondes totalement cohérentes. Interféromètre de Michelson. Lames minces. Cavity de Fabry-Pérot.

Diffraction à l'infini. Principe de Huyghens-Fresnel. Diffraction par une fente rectangulaire.

Diffraction à l'infini par deux fentes (fentes d'Young), par un réseau de fentes.

V. THERMODYNAMIQUE

Fonctions d'état : énergie interne, entropie, enthalpie, énergie libre, enthalpie libre ainsi que leurs différentielles.

Variables extensives, intensives, équilibre thermodynamique.

Capacités thermiques à volume constant et à pression constante.

Gaz parfait

Modèle du gaz parfait monoatomique. Distribution de Maxwell-Boltzmann des vitesses pour un gaz parfait monoatomique. Théorème d'équipartition.

Chocs sur une paroi. Relation entre pression et vitesse quadratique moyenne.

Gaz parfaits dans un champ de force dérivant de l'énergie potentielle $V(\mathbf{r})$. Loi du nivellement barométrique.

Les limites du modèle de gaz parfait. Les gaz réels. Le gaz de van der Waals.

Premier et second principes de la thermodynamique

Premier principe. Énergie interne U . Transferts de chaleur. Travail échangé par un système. Travail des forces de pression. Enthalpie et détente de Joule-Thomson. Enthalpie d'un gaz parfait.

Second principe. Entropie S . Bilans entropiques. Évolutions réversibles et irréversibles. Définition thermodynamique de la température.

Entropie pour un gaz parfait, pour une phase condensée et indilatable.

Machines thermiques. Cycle ditherme. Rendements. Théorème de Carnot.

Corps pur en équilibre. Point triple, point critique, enthalpie et entropie de changement d'états. Formule de Clapeyron.

Énergie libre et enthalpie libre : définitions et différentielles. Potentiel chimique. Cas du gaz parfait. Équilibre entre deux phases. Généralisation, règle des phases de Gibbs.