CONCOURS D'ADMISSION 2023

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 1_Automne

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on rappelle qu'une *norme* sur E est une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ telle que :

— pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;

— pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

— pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Dans tout le problème on fixe un entier $d \geqslant 1$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'ensemble des matrices réelles (resp. des matrices inversibles) de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ (resp. $\mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$). On identifie $\mathbb{K}^d$ à l'ensemble des vecteurs colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On rappelle également la *formule du binôme de Newton :* si A, B dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ sont telles que $AB = BA$, alors pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Partie 1 : Rayon spectral

Dans cette partie on fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^d$. Pour $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ on pose

$$N(A) = \max\left\{\|AX\|,\ X \in \mathbb{C}^d,\ \|X\| \leqslant 1\right\}.$$

On définit le *rayon spectral* de A par

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\right\},$$

où $\mathrm{Sp}(A)$ désigne le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres.

1. Montrer que la fonction N est bien définie et qu'elle définit une norme sur $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, telle que pour tous $A, B \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, on a $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

2. Pour $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, montrer que $\rho(A) \leqslant N(A)$ et également que pour tout $k \geqslant 1$, $\rho(A) \leqslant N(A^k)^{1/k}$.

3. Montrer que $\rho(A) = 0$ si et seulement si A est nilpotente.
(*Indication : pour l'implication directe on pourra utiliser le fait que A est trigonalisable.*)

4. Dans cette question, on établit l'équivalence :

$$\rho(A) < 1 \iff A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a. Montrer l'implication : $A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$.

b. Montrer que si $N(A) < 1$ alors $A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
On prend maintenant une matrice A telle que $\rho(A) < 1$ et on fixe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$, où T est une matrice triangulaire supérieure. On pose finalement D la matrice diagonale ayant les mêmes éléments diagonaux que T.

c. Montrer que $N(D) < 1$.

d. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $N(U_\delta^{-1} T U_\delta) < 1$, où U_δ est la matrice diagonale $U_\delta = \mathrm{diag}(\delta, \delta^2, \ldots, \delta^d)$.

e. En écrivant $A = P U_\delta U_\delta^{-1} T U_\delta U_\delta^{-1} P^{-1}$, conclure que A^n tend vers 0 quand $n \to \infty$.

5. L'objet de cette question est de montrer que pour toute matrice $A \in M_d(\mathbb{C})$ on a

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} N(A^n)^{1/n}.$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et on pose $\tilde{A} = A/(\rho(A) + \varepsilon)$.

a. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $N(\tilde{A}^n) \leqslant 1$.

b. Conclure.

6. Soit $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Montrer que si $A \neq \mathrm{I}_d$ alors $N(A^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
(*Indication : on pourra écrire* $A = \mathrm{I}_d + B$ *et utiliser la formule du binôme de Newton.*)

Partie 2 : Théorème de Perron

Pour $X = (x_i) \in \mathbb{R}^d$, on dira que X est positif (resp. strictement positif) et on notera que $X \geqslant 0$ (resp. $X > 0$) si pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ on a $x_i \geqslant 0$ (resp. $x_i > 0$). De même pour $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$, on dira que A est positive (resp. strictement positive) et on notera $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2$ on a $a_{i,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{i,j} > 0$). Également, pour $X, Y \in \mathbb{R}^d$ on écrira $X \geqslant Y$ si $X - Y \geqslant 0$ et de même pour des matrices. Finalement pour $X = (x_i) \in \mathbb{C}^d$ on posera $|X|$ le vecteur de coordonnées $(|x_i|)_{1\leqslant i\leqslant d}$.

7. Montrer les relations suivantes :
— ($A \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$) implique $AX \geqslant 0$.
— ($A > 0$, $X \geqslant 0$, et $X \neq 0$) implique $AX > 0$.
— Si $A \geqslant 0$ et $X \in \mathbb{C}^d$ alors $|AX| \leqslant A\,|X|$.

8. Montrer que $A > 0 \Rightarrow \rho(A) > 0$
(*Indication : utiliser la question 3.*)

9. Dorénavant on fixe une matrice $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $A > 0$. L'objet de cette question est de montrer qu'il existe $Y > 0$ dans $\mathbb{R}^d$ tel que $AY = \rho(A)Y$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $|\lambda| = \rho(A)$ et $X \in \mathbb{C}^d$ tel que $AX = \lambda X$.

a. Montrer que $A\,|X| \geqslant \rho(A)\,|X|$.
Supposons par l'absurde que $A\,|X| \neq \rho(A)\,|X|$.

b. Montrer que $A^2\,|X| > \rho(A) A\,|X|$.

c. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $A^{n+1}\,|X| \geqslant (\rho(A) + \varepsilon)^n A\,|X|$.

d. Utiliser la question 4 pour en déduire une contradiction. Ainsi $A\,|X| = \rho(A)\,|X|$.

e. Montrer que $|X| > 0$.

10. Soit λ une valeur propre complexe de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et $Y \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Montrer que $A\,|Y| = \rho(A)\,|Y|$, et en déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha Y \geqslant 0$. Conclure que $\lambda = \rho(A)$.

On a ainsi montré que si A est strictement positive, il existe une unique valeur propre de module maximal, associée à un vecteur propre strictement positif. On peut également montrer que cette valeur propre est simple. Ceci constitue le théorème de Perron (1907).

Partie 3 : Chemins dans les graphes et théorème de Frobenius

Soit $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $A \geqslant 0$.

11. Soit $A_k = A + \frac{1}{k}\mathrm{I}_d$. Montrer que $\rho(A_k) \to \rho(A)$ quand $k \to \infty$.

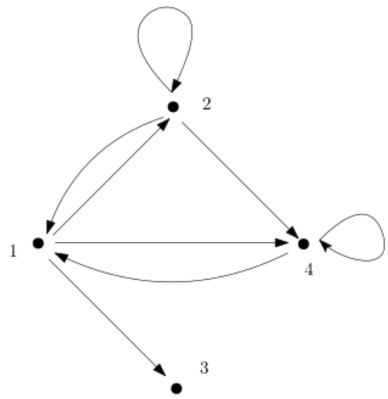
12. Soit $Q = \left\{X = (x_i) \in \mathbb{R}^d,\ X \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{d} x_i = 1\right\}$. Montrer que Q est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^d$.

13. Déduire des deux questions précédentes qu'il existe un vecteur $X \geqslant 0$ tel que $AX = \rho(A)X$.

Un *graphe orienté* est un couple (S, A) où S est un ensemble fini et A est un sous ensemble de S^2. Les éléments de S sont par définition les *sommets* du graphe et les éléments de A sont ses *arêtes*. Si $a = (s, s') \in A$, a est l'arête orientée joignant s à s'. Un *chemin* de longueur ℓ de s à s' est par définition une suite d'arêtes $(s_i, s_{i+1}) \in A$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$ avec $s_1 = s$ et $s_{\ell+1} = s'$. Par définition tout sommet est relié à lui même par un chemin de longueur 0.

Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in M_d(\mathbb{R})$ est une matrice positive, le graphe $\Gamma(A)$ associé à A est défini de la façon suivante : on pose $S = \{1, \ldots, d\}$ et $A = \left\{(i, j) \in S^2,\ a_{i,j} > 0\right\}$. Exemple de matrice positive et de graphe associé :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0.5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



On dit qu'une matrice positive $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ est *irréductible* si le graphe $\Gamma(A)$ a la propriété suivante : pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, d\}^2$ il existe un chemin (de longueur $\ell \geqslant 0$ quelconque) dans $\Gamma(A)$ joignant i à j.

14. Montrer qu'il existe un chemin de longueur $\ell \geqslant 0$ de i à j dans $\Gamma(A)$ si et seulement si $a_{i,j}^{(\ell)} > 0$, où l'on a noté $A^\ell = \left(a_{i,j}^{(\ell)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$.

15. Montrer que si A est irréductible alors $(\mathrm{I}_d + A)^{d-1} > 0$.

16. Supposons maintenant que A est une matrice positive et irréductible et posons $B = (\mathrm{I}_d + A)^{d-1}$.

a. Montrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $(1 + \lambda)^{d-1}$, avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

b. Montrer que $\rho(B) = (1 + \rho(A))^{d-1}$.

c. Montrer que A admet un vecteur propre $X > 0$ associé à la valeur propre $\rho(A)$.

Cette extension du théorème de Perron est due à Frobenius (1912). Le théorème de Perron-Frobenius est d'une importance capitale dans de nombreuses applications des mathématiques ; il est par exemple au coeur de l'algorithme du moteur de recherche Google.

◇ ◇ ◇