CONCOURS D'ADMISSION 2023

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 1_Automne

Épreuve n°3

PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

– Quelques problèmes d’électro- et magnéto-statique –

Le problème comporte 4 exercices indépendants portant sur des situations impliquant des champs électrostatiques ou magnétostatiques.

Valeurs numériques de quelques constantes fondamentales :

- Charge élémentaire : e = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C
- Célérité de la lumière dans le vide : c = $3{,}0 \cdot 10^{8}$ $m.s^{-1}$
- Permittivité et perméabilité relative du vide : $\epsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ USI et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ USI.

Formulaire :

- Dérivée partielle : on considère une fonction de plusieurs variables $f(x,y)$ et on rappelle que la dérivée partielle, par exemple $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, de cette fonction est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, ici x, les autres étant gardées constantes.

  Exemple : $f(x,y) = x^2 \cos(3y) \longrightarrow \partial f/\partial x = 2x\cos(3y)$ et $\partial f/\partial y = -3x^2 \sin(3y)$.
- Intégrale : $\displaystyle\int \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}$
- Opérateurs d’analyse vectorielle du premier ordre en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

- Opérateurs d’analyse vectorielle du second ordre (Laplaciens) :
  - Laplacien d'un champ scalaire : $\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
  - Expression analytique du Laplacien scalaire de $f(r)$ en coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf)$
  - Laplacien d'un champ vectoriel : $\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\overrightarrow{V})) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V})$

Loi de Biot et Savart (rappel) : Soit C la courbe géométrique représentant un circuit filiforme, et soit M' un point de cette courbe C repéré par $\vec{r'}$. On note $\vec{dl}$ le vecteur déplacement élémentaire tangent à la courbe C au point M'. Dans le vide, le circuit parcouru par un courant continu d'intensité I crée en tout point M repéré par $\vec{r}$ extérieur à C le champ magnétique $B(\vec{r})$ donné par la formule : $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\vec{dl}\wedge(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$

,

Exercice 1 : Ballons chargés

Par un temps chaud et sec, on charge deux ballons de baudruche que l'on considère sphériques, de masse $m = 4$ g et rayon $R = 10$ cm, en les frottant sur un pull. On les suspend avec des ficelles de même longueur L autour d'un même point et on les laisse pendre librement.

Ils s'éloignent de 40 cm l'un de l'autre tout en formant un angle de 30° avec la verticale.

On assimile les ballons à des sphères de rayon R et on admet que la différence de potentiel ΔV du système de deux sphères peut-être estimée par l'expression : $\Delta V \sim Q/(4\pi\epsilon_0 R)$.

1. Que représente Q dans l'expression précédente ?

2. Retrouver l'expression de ΔV par analyse dimensionnelle.

3. Quelle est la longueur L des ficelles utilisées dans l'expérience ?

4. En justifiant correctement le raisonnement et en détaillant la méthode utilisée, estimer la différence de potentiel entre chacun des ballons et l'air environnant.

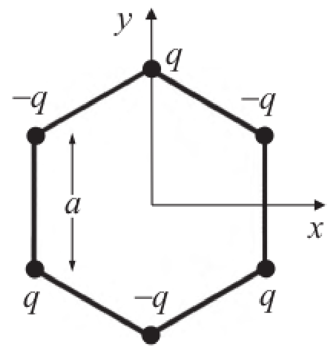
5. Comparer cet ordre de grandeur à d'autres différences de potentiel connues. Commenter.

Exercice 2 : Charges sur un hexagone

1. Rappeler la constitution d'un dipôle électrostatique et retrouver les expressions du champ et du potentiel qu'il génère en un point éloigné. Définir proprement les paramètres du système et illustrer la situation physique par un schéma clair.

2. Rappeler les caractéristiques du développement dipolaire.

On va généraliser ce résultat en considérant une distribution de charges ponctuelles $+q$ et $-q$ placées de manière alternée sur les six côtés d'un hexagone régulier. Le centre de l'hexagone sera noté *O*.



3. Calculer la charge électrique totale puis le moment dipolaire électrique total de cette distribution de charges. Retrouver ces résultats par des arguments de symétrie ou une construction graphique.

4. On définit le moment quadripolaire d'une distribution de N charges $q_{i=1..N}$ par le tenseur $\mathbb{Q}$ représenté sous la forme d'une matrice 3×3 d'éléments :

$$\mathbb{Q}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} q_i \alpha_i \beta_i$$

où α_i et β_i représentent les coordonnées de la charge d'index i : $(\alpha_i, \beta_i) = \{x_i, y_i, z_i\}$. Par exemple : $\mathbb{Q}_{xy} = \sum_{i=1}^{N} q_i x_i y_i$.

Calculer le moment quadripolaire de cette distribution hexagonale. Retrouver le résultat par des arguments de symétrie ou une construction graphique.

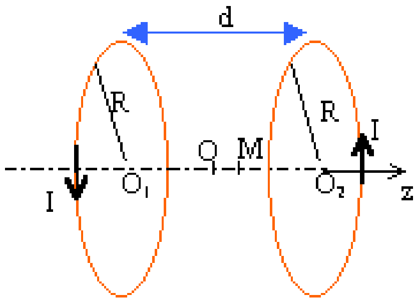
5. On généralise les développements précédents en introduisant ensuite le moment octupolaire par le tenseur d'ordre 3 : $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i=1}^{N} q_i \alpha_i \beta_i \gamma_i$

où, comme précédemment : $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = \{x_i, y_i, z_i\}$. Montrer qu'il existe au moins un élément « diagonal » $\mathbb{O}_{\alpha,\alpha,\alpha}$ non nul.

6. Déduire des questions précédentes ce que l'on appelle le développement multipolaire d'une distribution de charges. Déduire dans le cas de l'hexagone la puissance n telle que, en un point M suffisamment loin de l'hexagone repéré par sa distance r au barycentre des charges, le potentiel $V(r)$ de la distribution soit de la forme : $V(r) \propto r^n$.

Exercice 3 : Bobines de Helmholtz

On considère deux spires de rayon R en configuration de Helmholtz : de même axe u_z , séparées d'une distance d et parcourues chacune par un courant I de même sens.



1. Par la méthode de votre choix, calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en un point M de l'axe u_z. On pourra commencer par rappeler ou retrouver le champ magnétique d'une spire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I sur l'axe de la spire. Les résultats obtenus devront être proprement justifiés.

2. Pour quelle configuration particulière des paramètres d et R obtient-on un champ magnétique aussi uniforme que possible dans la région centrale des deux bobines, c'est-à-dire pour les valeurs de z comprises entre $-d/2$ et $+d/2$? On appellera cette configuration la « configuration Helmholtz ».

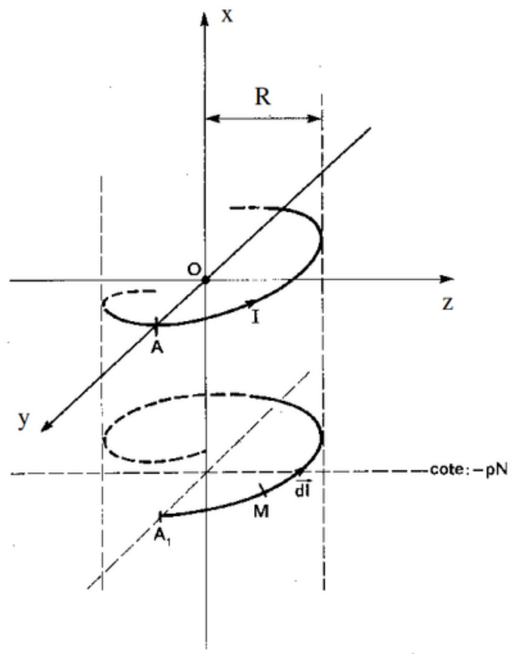
3. Montrer que pour un point de l'axe u_z très loin des bobines et dans la « configuration Helmholtz », le champ magnétique sur l'axe varie comme : $B_z(z) \propto \alpha \cdot z^{-3} + \beta \cdot z^{-7}$.

4. Comment modifier le système précédent, en ajoutant ou retirant des bobines, pour construire un champ tel que, loin des sources, la dépendance sur l'axe soit uniquement : $B_z(z) \propto \beta \cdot z^{-7}$?

Exercice 4 : Bobine hélicoïdale et petit train

Soit une bobine hélicoïdale qui est un circuit en forme d'hélice circulaire d'axe O_x de rayon R, de longueur L, comportant $2N$ spires complètes parcourues par un courant I. Le pas de l'hélice est noté p. Les spires sont réparties entre la cote $x_1 = -pN$ et la cote $x_2 = +pN$.

L’hélice est rapportée à un repère (O, x, y, z) comme dans la figure ci-dessous.



1. Donner l’équation paramétrée de l’hélice en fonction de p et de R.

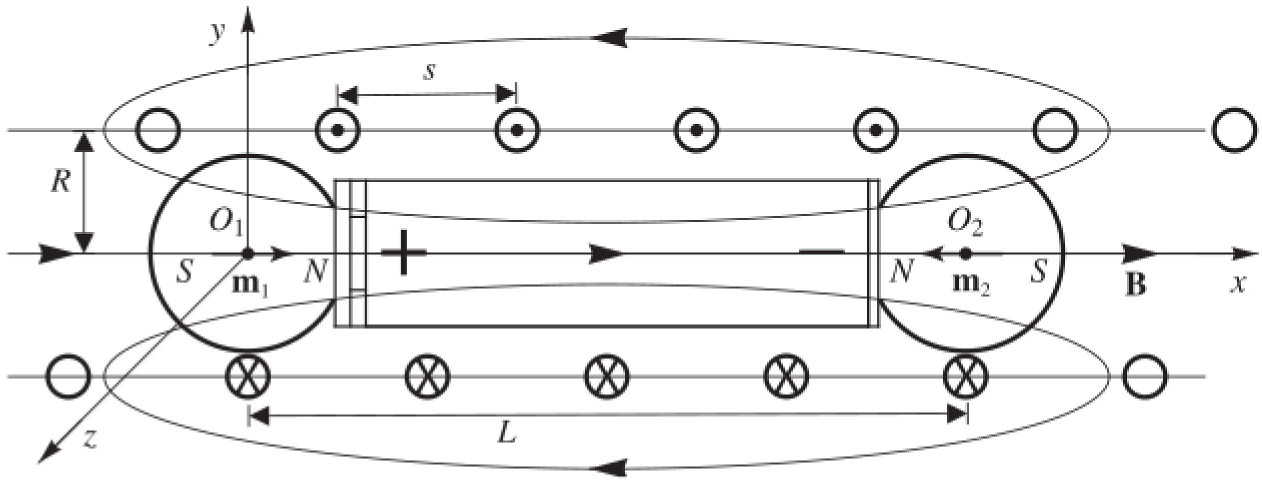
2. Quelle est la contribution $d\vec{B}_0$ au champ magnétique total en O de l’élément de longueur $\vec{dl}$ au point M?

3. Calculer B_{0x} composante de l'induction résultante au point O en détaillant le calcul.

4. Retrouver le résultat connu du solénoïde infini en détaillant les approximations effectuées.

5. On installe la bobine précédente horizontalement et on remplace la source de courant externe générant le courant I dans les questions précédentes par un « petit train » de longueur L formé d’une pile et de deux aimants permanents fixés sur les pôles dans cet enroulement (voir figure ci-dessous).

Sachant qu’un moment dipolaire magnétique $\vec{m}$ subit une force $\vec{F} = (\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{B}$, justifier que le « petit train » avance à l’intérieur de la bobine. On négligera tous les frottements mécaniques.



6. Montrer par un raisonnement qualitatif que la force qui fait avancer le petit train est de la forme $F = CI$ où le paramètre C ne dépend que en fonction des paramètres géométriques du problème et du moment dipolaire magnétique.

7. Retrouver à partir des résultats des questions 2. et 3. le champ magnétique B_{0x} en un point M de coordonnée x quelconque.

8. A partir de l'expression de la force subie par un moment dipolaire magnétique dans un champ magnétique inhomogène, trouver l'expression de C.