CONCOURS D'ADMISSION 2023

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Ce sujet comporte un exercice et un problème indépendants.

Exercice : algèbre linéaire.

Soit $J \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^n et montrer que J est diagonalisable.

2. Calculer les valeurs propres de J.

3. En déduire la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes arbitraires.

Problème : fonctions C^∞.

Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit le support de φ par :

$$\text{Supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

On dit que φ est à support compact si $\text{Supp}(\varphi)$ est un sous ensemble borné de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on pose

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \ \text{ et } \ \|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt.$$

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note également $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}) := \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe C^k à support compact. On note $\varphi^{(n)}$ la dérivée n^{e} d'une fonction n fois dérivable, avec la convention que $\varphi^{(0)} = \varphi$.

Questions préliminaires.

1. Montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\|\cdot\|_1 : \varphi \mapsto \|\varphi\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. On pourra admettre sans démonstration le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est également une norme.

3. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont elles équivalentes ?

Partie 1 : Exemples de fonctions C^∞ à support compact.

4. Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, à valeurs réelles. On suppose que $f'(x)$ admet une limite finie ℓ quand $x \to a^+$. Montrer que f est dérivable à droite en a et préciser la valeur de $f'(a)$.

5. Soit φ_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ \varphi_0(0) = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que pour $x \neq 0$ on a

$$\varphi_0^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

b. Montrer que φ_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

6. À l'aide de φ_0, montrer qu'il existe une fonction φ_1 de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, dont le support est $[0,\infty[$. En déduire qu'il existe une fonction φ_2 de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Supp}(\varphi_2) = [-1,1]$.

Partie 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ à support compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right| = \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$$

et on cherche des propriétés satisfaites par la suite (M_n). Dans cette partie on suppose que f est *non identiquement nulle.*

7. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathrm{Supp}(f)$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $f^{(n)}(x_0) = 0$.

8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

9. Montrer que s'il existe des constantes $A > 0$ et $B > 0$, et une sous-suite $(n_j)_{j\geqslant 1}$ telles que $M_{n_j} \leqslant AB^{n_j}(n_j)!$, alors f est identiquement nulle sur l'intervalle $]x_0 - 1/B, x_0 + 1/B[$.

10. En déduire que pour tout $B > 0$ on a

$$\frac{M_n}{B^n n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Partie 3 :

Dans cette partie on cherche à montrer que si $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{M_{n-1}}{M_n}$ converge, il existe une fonction $f\in\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ non identiquement nulle telle que pour tout $n\geqslant 0$, $\|f^{(n)}\|_\infty\leqslant M_n$.

Pour $\mu>0$ et $\varphi\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on définit $T_\mu:\varphi\mapsto T_\mu\varphi$, où pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$T_\mu\varphi(x)=\frac{1}{2\mu}\int_{x-\mu}^{x+\mu}\varphi(t)dt.$$

11. Montrer que T_μ est une application linéaire, qui envoie l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans lui même, et que pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ on a $\|T_\mu\varphi\|_\infty\leqslant\|\varphi\|_\infty$.

12. Montrer que si $\varphi\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est une fonction positive, on a $\|T_\mu\varphi\|_1=\|\varphi\|_1$.

13. Montrer que pour tout $k\geqslant 0$, si $\varphi\in\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$ alors $T_\mu\varphi\in\mathcal{C}_c^{k+1}(\mathbb{R})$. Montrer également que

$$\left\|(T_\mu\varphi)^{(k)}\right\|_\infty\leqslant\left\|\varphi^{(k)}\right\|_\infty.$$

14. Pour $k\geqslant 1$, montrer que si $\varphi\in\mathcal{C}_c^{k+1}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\|(T_\mu\varphi)^{(k)}-\varphi^{(k)}\right\|_\infty\leqslant\frac{\mu}{2}\left\|\varphi^{(k+1)}\right\|_\infty.$$

On suppose maintenant que $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{n\geqslant 1}\mu_n$ converge. On fixe $\psi_0\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et on définit par récurrence la suite $(\psi_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$\forall n\geqslant 0,\ \psi_{n+1}=T_{\mu_{n+1}}\psi_n.$$

15. Montrer que pour tout $n\geqslant k$, ψ_n est de classe C^k.

16. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant k+2$, on a

$$\left\|\psi_{n+1}^{(k)}-\psi_n^{(k)}\right\|_\infty\leqslant\frac{\mu_{n+1}}{2}\left\|\psi_{k+1}^{(k+1)}\right\|_\infty.$$

En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite de fonctions $\psi_n^{(k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

17. Montrer que la limite $f=\lim_{n\to\infty}\psi_n$ est de classe C^∞, et que pour tout $k\geqslant 0$ on a

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty\leqslant\left\|\psi_k^{(k)}\right\|_\infty.$$

18. Montrer que pour tout $k\geqslant 1$ on a

$$\left\|\psi_k^{(k)}\right\|_\infty\leqslant\|\psi_0\|_\infty\frac{1}{\mu_1\cdots\mu_k}.$$

19. Montrer que f est à support compact et que si ψ_0 est positive et non identiquement nulle, alors il en est de même pour f.

20. Conclure quant à la question initialement posée.

◇ ◇ ◇