CONCOURS D'ADMISSION 2023

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°3

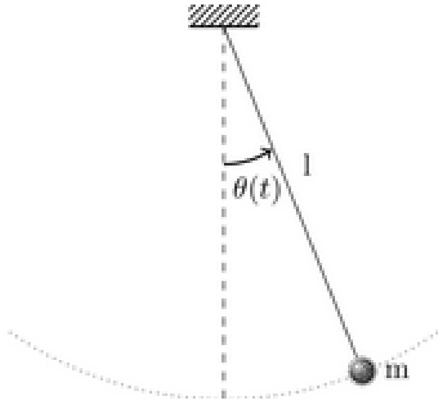
PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Exercice 1 : Oscillateur paramétrique

On considère un pendule simple de longueur variable $l(t)$, réalisé à l'aide d'un fil inextensible coulissant au travers d'un anneau au point O. Une masse m est fixée à son extrémité M qui est animée d'un mouvement sinusoïdal de faible amplitude de sorte que : $OM(t) = l(t) = l_0(1 + \varepsilon\cos(\Omega t))$ avec $\varepsilon \ll 1$. On agit ainsi périodiquement sur la longueur du pendule pesant. On notera g l'accélération de la pesanteur.



1. Établir l'équation différentielle dont l'angle $\theta(t)$ que fait le fil avec la verticale est solution, en considérant dans un premier temps que la longueur du fil est constante, c'est-à-dire en considérant : $\varepsilon = 0$. Faire un schéma et préciser clairement les systèmes d'axes choisis pour caractériser le mouvement. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l_0}$.

2. Reprendre cette équation en considérant cette fois-ci que $\varepsilon \neq 0$. Simplifier l'équation en se limitant aux termes du second ordre en ε.

3. On cherche à déterminer la condition de résonance par une approche énergétique. Une solution approchée de l'élongation angulaire peut se mettre sous la forme : $\theta(t) = A(t)\left(\cos(\omega_0 t + \phi)\right)$. Justifier que l'on puisse faire l'approximation : $\dfrac{dA}{dt} \ll \dfrac{\omega_0 A}{2\pi}$.

4. Justifier que l'énergie mécanique E_m est proportionnelle au carré de l'amplitude A.

5. Dans ces conditions montrer que l'on peut écrire que le rapport $\dfrac{1}{E_m}\dfrac{dE_m}{dt}$ comme une combinaison linéaire des fonctions : $\sin(\Omega t)$, $\sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\phi)$ et $\sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\phi)$.

6. Calculer la moyenne temporelle de $\dfrac{1}{E_m}\dfrac{dE_m}{dt}$ dans les deux cas suivants :

   a. Ω différent de $2\omega_0$;

   b. Ω égal à $2\omega_0$. Montrer, dans ce deuxième cas, que l'énergie croît exponentiellement. Conclusion ?

Exercice 2 : Trajectoires interplanétaires

On cherche à envoyer un vaisseau sur Mars en optimisant la consommation de carburant. Pour cela on doit choisir la ou les trajectoires les plus « économes ».

1. La première préoccupation est d'échapper à la force d'attraction terrestre. La première vitesse cosmique (7,9 km.s^{-1}) définit la vitesse qu'il faut atteindre pour pouvoir se placer en orbite autour de la Terre. Si la vitesse d'une sonde est inférieure à cette vitesse, l'engin suit une trajectoire balistique sans pouvoir se satelliser. La deuxième vitesse cosmique (11,2 km.s^{-1}) représente la vitesse limite permettant de s'évader définitivement de l'influence gravitationnelle de la Terre.

Retrouver les deux valeurs numériques de ces deux vitesses cosmiques. Quelle vitesse minimale doit-on donner à une fusée que l'on envoie sur Mars ?

2. Justifier comment on peut profiter de la « poussée » de la Terre pour ce lancement vers Mars. On appelle vitesse relative la vitesse communiquée au vaisseau par les moteurs. Quelle est la vitesse totale du vaisseau spatial sur une orbite héliocentrique ?

3. Justifier que pour effectuer un voyage qui soit le plus économique possible en direction de Mars, un vaisseau spatial doit suivre une trajectoire autour du Soleil elliptique dont l'une des extrémités touche la Terre et l'autre Mars. Donner les caractéristiques générales (périhélie, aphélie) de cette trajectoire. On rappelle que le périhélie est le point de l'orbite le plus proche du Soleil et l'aphélie le point de l'orbite le plus éloigné du Soleil. Rappeler les trois lois de Képler.

4. Faire un schéma précis de la trajectoire du vaisseau spatial en supposant, pour simplifier, que les trajectoires de la Terre et de Mars sont circulaires.

5. Ce type de trajectoire permettant de transférer un objet entre deux planètes avec une dépense énergétique minimale est souvent appelée « trajectoire de transfert de Hohmann ». Justifier que l'on puisse avoir deux types de trajectoires, dites de type I (la plus courte) ou de type II (la plus longue). Quel est l'ordre de grandeur de la durée du voyage entre la Terre et Mars.

6. Pour trouver l'équation de la trajectoire du vaisseau spatial, on repère sa position (point M) par ses coordonnées polaires, r et θ. Le Soleil est placé au point O. Décrire les caractéristiques générales du mouvement. Donner l'expression de la constante des aires C.

7. Rappeler les expressions de la vitesse et de l'accélération du point M en fonction de $u = 1/r$ et de ses dérivées par rapport à θ.

8. Déduire de ces formules l'expression de l'équation de la trajectoire sous la forme $u = f(\theta)$. Retrouver les expressions théoriques des lois de Képler.

Applications numériques :

- **distance Terre-Soleil :** $R_T = 1.5\ 10^8$ **km, masse de la Terre :** $M_T = 6.0\ 10^{24}$ **kg**
- **distance Terre-Mars :** $R_M = 2.3\ 10^8$ **km, masse de Mars :** $M_M = 6.4\ 10^{23}$ **kg**
- **rayon terrestre :** $r_T = 6.4\ 10^3$ **km**
- **constante universelle de gravitation :** $G = 6.67\ 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$

Exercice 3 : Propriétés thermodynamiques d'un élastique

On mesure les propriétés d'un élastique de longueur L, soumis à une tension J à une température T. On mesure expérimentalement l'énergie libre et l'enthalpie libre de cet élastique et on modélise ces deux fonctions par :

- $G(T,L) = \left(\dfrac{\partial J}{\partial T}\right)_L = \dfrac{aL}{L_0}\left(1 - \left(\dfrac{L_0}{L}\right)^3\right)$ et
- $F(T,L) = \left(\dfrac{\partial J}{\partial L}\right)_T = \dfrac{aT}{L_0}\left(1 + 2\left(\dfrac{L_0}{L}\right)^3\right)$

où L_0 est la longueur à vide de l'élastique (indépendante de T), et a une constante.

1. Montrer que $J(T,L)$ est une fonction d'état en qualifiant ses dérivées secondes croisées.

2. Exprimer la différentielle de l'énergie interne de l'élastique dU.

3. Trouver l'équation d'état de l'élastique.

4. En supposant que la capacité calorifique à longueur constante est une constante, déterminer la température finale de l'élastique si on l'étire à partir de longueur L_0 et d'une température T_i à une longueur L_f de façon adiabatique et réversible.

5. On relâche maintenant l'élastique qui retourne ainsi à sa longueur à vide L_0. En supposant qu'aucune quantité de chaleur n'est échangée, calculer la variation d'entropie et de température.

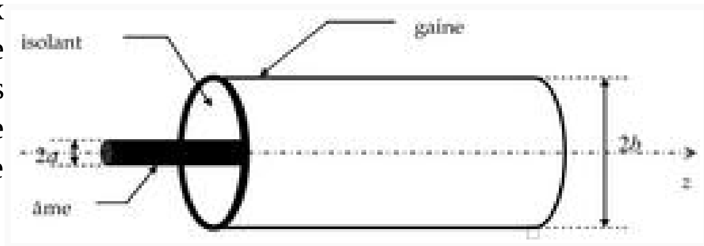
Formulaire :

Dérivée partielle : on considère une fonction de plusieurs variables $f(x,y)$ et on rappelle que la dérivée partielle, par exemple $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, de cette fonction est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, ici x, les autres étant gardées constantes.

Exemple : $f(x,y) = x^2\cos(3y) \longrightarrow \partial f/\partial x = 2x\cos(3y)$ et $\partial f/\partial y = -3x^2\sin(3y)$.

Exercice 4 : Câble coaxial

On considère un câble coaxial constitué par deux cylindres conducteurs coaxiaux de section circulaire et de rayon respectif a et b tels que $a < b$ de très grande longueur, séparé par un isolant. Le cylindre central est plein et est appelé « l'âme » alors que le cylindre extérieur est creux et est appelé « la gaine ».



L'isolant est un milieu non magnétique de permittivité diélectrique relative $\epsilon = 2.25$. On travaillera en coordonnées cylindriques $\mathbf{r} = (r,\theta,z)$ d'axe Oz orienté le long du câble coaxial. Le champ électromagnétique se propageant dans la direction $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$ solution des équations de Maxwell dans le milieu isolant est : $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0(r,z)\exp\left[i(\omega t - kz)\right]\mathbf{u_r}$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = B_0(r,z)\exp\left[i(\omega t - kz)\right]\mathbf{u}_\theta$. Les conducteurs constituant le câble coaxial sont parfaits.

1. Que peut-on conclure quant aux charges et courants dans les conducteurs ?

2. Quelles sont les conditions aux limites devant être satisfaites par les champs électrique et magnétique $E_0(r,z)$ et $B_0(r,z)$ en $r = a$ et $r = b$?

3. Montrer que l'on peut simplifier l'écriture du champ électromagnétique initial en : $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0(r)\exp\left[i(\omega t - kz)\right]\mathbf{u_r}$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = B_0(r)\exp\left[i(\omega t - kz)\right]\mathbf{u}_\theta$ où $E_0(r)$ et $B_0(r)$ sont des fonctions réelles.

4. Pourquoi ce champ électromagnétique est-il appelé « Mode Transverse Électrique et Magnétique » ou mode « TEM » ?

5. Montrer que $E_0(r) = E_a a/r$ où E_a est l'amplitude du champ électrique en $r = a$.

6. En déduire l'expression de $B_0(r)$.

7. Calculer le vecteur de Poynting correspondant.

8. En déduire l'intensité moyennée sur une période se propageant dans le câble coaxial.

9. Calculer la puissance totale se propageant le long du câble coaxial.

Formulaire :

Divergence d'un vecteur V en coordonnées cylindriques : $\nabla\cdot\mathbf{V} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rV_r)}{\partial r}\mathbf{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta + \dfrac{\partial V_z}{\partial z}\mathbf{u}_z$