Épreuves orales de Mathématiques 1 et 2, Filière MP

Les paragraphes suivants rassemblent les impressions qu'ont laissées aux examinateurs de mathématiques les oraux de l'édition 2023 du concours.

Les examinateurs espèrent que les candidats malheureux de cette année trouveront dans ce rapport un début d'explication pour leur échec et que sa lecture permettra aux candidats du concours de 2023 d'aborder les oraux dans de bonnes conditions.

Donnons d'abord quelques statistiques.

Épreuves orales de Mathématiques 1 : La moyenne des notes des 309 candidats français est de 11,73/20 avec un écart-type de 3,01.

Épreuves orales de Mathématiques 2 : La moyenne des notes des 309 candidats français est de 11,79/20 avec un écart-type de 3,13.

Les nouveaux programmes sont appliqués lors des oraux du concours. Il est important de rappeler que l'épreuve orale porte sur l'ensemble du programme, y compris la théorie des probabilités ou le calcul différentiel. Bien évidemment les exercices sont minutieusement conçus pour que seuls les théorèmes du programme suffisent à leur résolution.

L'oral de mathématiques doit permettre à l'examinateur d'évaluer la compréhension qu'a le candidat des concepts et méthodes fondamentaux du programme de mathématiques.

Pendant l'interrogation, l'autonomie du candidat est particulièrement importante. L'examinateur apprécie la capacité de ce dernier à aller de l'avant, ainsi que son aptitude à imaginer des stratégies et à faire preuve d'agilité technique. Les candidats doivent prendre l'initiative, proposer un plan d'attaque ou, si le problème semble difficile, tester l'énoncé sur des cas particuliers et éventuellement dessiner des figures pour donner forme à son intuition, ce qui peut s'avérer utile même hors du cas évident d'un problème de géométrie. Face à un exercice difficile, le candidat est censé réagir de façon cohérente et intelligente en s'inspirant des situations plus communes qu'il a déjà rencontrées, ou de cas particuliers intéressants plus accessibles. L'examinateur peut alors choisir de le laisser développer une stratégie de résolution (si tant est qu'elle soit bien mise en œuvre, quand bien même celle-là ne fût pas la plus efficace), ou au contraire l'aiguiller vers des arguments plus adaptés, dont le développement peut se révéler plus gratifiant.

Un candidat doit donner des réponses claires et directes aux questions posées. Une bonne formulation doit conjuguer clarté, concision et précision. Le candidat doit structurer sa réflexion et formuler avec précision des arguments complets. Il vaut mieux, avant de s'exprimer, faire une courte pause pour rassembler ses idées. Par ailleurs, il faut prendre le temps de la réflexion et ne pas se lancer dans des calculs sans objet.

Mentionnons encore une tendance récente qui nuit au déroulement de la pensée mathématique et à la discussion avec l'examinateur : certains candidats rechignent à écrire des propriétés mathématiques précises au tableau, et parfois même se contentent d'un bavardage en guise de démonstration. Une variante de ce phénomène est la réticence à calculer. Il est tout à l'honneur d'un candidat de réfléchir si un argument abstrait permet de court-circuiter un calcul, mais on s'attend aussi à ce que le candidat sache juger de la pertinence de cette réflexion.

Lorsque l'examinateur dicte l'énoncé de l'exercice, le candidat ne doit pas essayer de le reformuler ou d'utiliser abusivement des abréviations : ceci mène le plus souvent le candidat à écrire une question qui n'est pas celle qui lui a été posée. Le candidat doit écrire au tableau l'énoncé dans les termes exacts dictés par l'examinateur. Ceux-ci ont toujours été choisis par les examinateurs avec soin et précision.

Si les fautes d'orthographe et de grammaire lors de la dictée du ou des exercices ne sont pas prises en compte dans l'évaluation des candidats, elles devraient néanmoins être évitées.

Il arrive aussi que l'examinateur demande qu'un argument soit clarifié, sans pour autant que la stratégie du candidat soit remise en cause : certains candidats surréagissent à ces observations alors que l'examinateur ne voulait qu'infléchir le cours de leur réflexion.

Venons-en enfin aux mathématiques elles-mêmes. Nous avons constaté les manques suivants chez de nombreux candidats :

- *Cours* Le jury a été surpris que la manipulation de valeurs absolues pose problème à un grand nombre de candidats. Les examinateurs ont noté des manquements sur des points fondamentaux du cours chez certains candidats : relations d'Euler, orthogonal d'une somme d'espaces vectoriels, la convergence uniforme, le théorème des accroissements finis, distinction entre élément minimal et borne inférieure ... Toute partie du programme peut faire l'objet d'un exercice, notamment le programme de première année.
- *Dessins* La réticence des candidats à faire le moindre dessin est préoccupante, que ce soit pour guider un raisonnement sur une marche aléatoire, ou autre.
- *Savoir-faire* La manipulation des matrices par blocs élémentaires doit être connue sans hésitation. Les examinateurs attendent que les candidats soient capables de calculer, de trouver un équivalent de $arctan(x) - \pi/2$ en $+\infty$... On attend aussi que les candidats puissent, avec des indications, mettre en oeuvre une extraction diagonale pour des suites...
- *Abréviations.* Des candidats utilisent des abréviations au tableau, qui conduisent parfois à des confusions. Par exemple est-ce que v.p. signifie valeur propre ou vecteur propre ?
- *Problèmes de logique.* Il est fâcheux de rencontrer des candidats ne sachant pas exprimer la négation d'une proposition mathématique. Par exemple, le fait qu'une fonction ne tend pas vers 0 à l'infini, ne signifie pas qu'elle admet une limite non-nulle à l'infini. Plusieurs candidats utilisent encore l'ancienne terminologie « analyse/synthèse » et s'y rattachent comme à une bouée de sauvetage, sans pour autant que cela les aide à résoudre le problème posé. Ils prononcent ces mots comme s'ils avaient eu une idée et ceci ne manque pas de laisser les examinateurs perplexes... L'usage de cette terminologie induit d'ailleurs parfois les candidats à commettre des erreurs de logique élémentaire.
- Le jury a remarqué que de nombreux candidats avaient du mal à effectuer au tableau des calculs de plusieurs lignes sans erreur. On aimerait que les candidats fassent appel à leur intuition pour détecter d'éventuelles erreurs de calculs. Bien que l'on ne s'attende pas à ce que les candidats soient des virtuoses du calcul, on aimerait qu'ils montrent une certaine familiarité avec des opérations élémentaires et sachent par exemple sans erreur

— montrer que le groupe symétrique S_3 est formé de cycles, mais pas le groupe symétrique S_4 (qui contient des produits de cycles qui ne sont pas des cycles),

— montrer que la trace d'une matrice nilpotente est nulle, mais que la réciproque est fausse ;

— montrer la continuité d'une application de la forme $X \to \|MX\|$ pour M une matrice et $\|.\|$ une norme ;

— déterminer la composée de deux symétries orthogonales du plan ou la composée de deux rotations de centres distincts.

- L'utilisation des nombres complexes dans des problèmes de géométrie cause chez certains candidats des difficultés surprenantes. Ce qui ne veut pas dire qu'il faut absolument les utiliser pour tout problème de géométrie plane : on s'attendrait par exemple, sans que cela soit le cas, à ce que les candidats soient capables de dessiner une réunion finie de cercles $C(r, 1-r)$ (pour $0 < r < 1$) sans passer par « $z = a + ib$ » ou « $z = \rho e^{i\theta}$ ».

On trouve cependant de très bons candidats échappant à toutes ces critiques. Certains montrent même un enthousiasme rafraîchissant pour ce beau domaine qu'est la mathématique et interagissent de manière constructive avec les examinateurs. Nous espérons que ces quelques conseils (auxquels pourront s'ajouter ceux contenus dans les rapports des années précédentes) permettront d'en augmenter le nombre.

Pour conclure, nous proposons ci-dessous un exemple d'exercice posé lors de la session 2023, accompagné d'éléments de correction et de commentaires.

Énoncé

1) Soit $n \geqslant 2$ un entier et X_n, Y_n deux variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $\{1, 2 \ldots n\}^2$. Pour r rationnel, on définit

$$u_n(r) = P(X_n \neq Y_n \text{ et la droite } (X_nY_n) \text{ est de pente } r).$$

Donner un équivalent de la suite $(u_n(r))_n$ quand n tend vers $+\infty$.

2) Soit A_n, B_n deux variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $\{1, 2 \ldots n\}^2$ et indépendantes de X_n et de Y_n. Montrer que

$$P(X_n \neq Y_n,\ A_n \neq B_n, (A_nB_n) \mathbin{/\!\!/} (X_nY_n)) =_{n\to+\infty} O((\log n)/n^2).$$

Commentaires

Précisons tout d'abord que l'énoncé est donné progressivement au candidat : la question 2 ne lui sera posée que s'il termine la question 1. Par ailleurs l'épreuve n'est pas une course de vitesse : il faudrait sans doute terminer l'exercice pour espérer obtenir la note maximale mais traiter la question 1 sans indication en montrant une bonne capacité de réflexion et une bonne maîtrise des mathématiques du programme de MP* serait déjà considéré comme tout à fait satisfaisant.

1) Les candidats qui se lancent dans la résolution de l'exercice sans faire le moindre dessin auront généralement laissé l'examinateur perplexe, surtout si ces candidats ne semblent pas

saisir les enjeux de la question, par exemple en ne se rendant pas compte que le produit d'un entier par un rationnel n'est pas forcément un entier. Par ailleurs, faire un dessin en traçant machinalement des axes avec l'origine au centre du dessin alors que la question appelle naturellement à placer l'origine en bas à gauche trahit un manque de réflexion assez regrettable.

Avant de se lancer dans la résolution de l'exercice, il peut être judicieux de faire quelques observations, même assez élémentaires, permettant de se mettre les idées au clair. Ainsi :

a) La droite (X_nY_n) n'est bien définie que si $X_n \neq Y_n$.

b) Si cette droite est bien définie, soit elle est verticale, soit elle a une pente.

c) Si la droite a une pente, celle-ci est nécessairement rationnelle, de la forme p/q avec $p \wedge q = 1$.

d) Pour un n fixé, il n'y a qu'un nombre fini de pentes possibles et par conséquent $|p|$ et $|q|$ ne peuvent pas être trop grands.

e) Le problème comporte des symétries.

Sur ce dernier point, on s'attend à ce qu'un candidat soit capable de formaliser : la symétrie par rapport à la médiatrice des côtés verticaux du carré transforme une droite de pente p/q en un droite de pente $-p/q$ et elle laisse invariante la mesure de probabilité uniforme sur $\{1, 2 \dots n\}^2$. On en déduit qu'une pente p/q a la même probabilité qu'une pente $-p/q$. De même, en raisonnant avec la symétrie par rapport aux diagonales, on montre qu'une pente p/q a la même probabilité qu'une pente q/p.

Ces observations faites, on peut aborder la résolution de l'exercice. Il est souvent utile de commencer par un cas simple et ici, le cas $r = 0$ se traite facilement. On a $r = 0$ si et seulement si $X_n \neq Y_n$ et les deux points ont même ordonnée. Or la probabilité que Y_n ait la même ordonnée que X_n mais soit différent de X_n est donnée par $(n-1)/n^2 \sim 1/n$.

Pour le cas général, l'analyse des symétries faite plus haut permet de se ramener au cas où $r = p/q$, $p \wedge q = 1$ et $p \geqslant q > 0$. Puisqu'on utilise la mesure uniforme, il suffit de dénombrer les couples (X_n, Y_n) donnant une pente r. Or on a une symétrie supplémentaire obtenue en échangeant X_n et Y_n : si $a(X_n)$ désigne l'abscisse de X_n et $b(X_n)$ son ordonnée, les couples (X_n, Y_n) donnant une pente r avec $a(Y_n) > a(X_n)$ sont aussi nombreux que ceux avec $a(Y_n) < a(X_n)$.

Comptons donc les couples avec $a(Y_n) > a(X_n)$. En reprenant l'observation d), on remarque que si X_n est "très en haut" ou "très à droite", peu de points Y_n pourront donner une pente r. Il se trouve qu'une mise en application de cette idée simple permet de résoudre la question.

Plus précisément, si $b(X_n) > n - q$ ou $a(X_n) > n - p$, aucun point ne peut donner une pente r.

De même, si $n - 2q < b(X_n) \leqslant n - q$ et $a(X_n) \leqslant n - p$, ou si $n - 2p < a(X_n) \leqslant n - p$ et $b(X_n) \leqslant n - q$, un seul point convient.

Si $n - 3q < b(X_n) \leqslant n - 2q$ et $a(X_n) \leqslant n - 2p$, ou si $n - 3p < a(X_n) \leqslant n - 2p$ et $b(X_n) \leqslant n - 2q$, deux points conviennent etc.

Le nombre de couples qui donnent une pente r avec $b(Y_n) > b(X_n)$ est donc

$$S_n(p,q) := \sum_{k=1}^{\lfloor n/p \rfloor} k[p(n-kq)+q(n-kp)-pq]$$

Arrivé à cette formule, le candidat doit pouvoir assez vite identifier les sommes de Riemann comme outil permettant de trouver un équivalent. On écrit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \to \int_0^1 f(x)dx$$

pour f fonction continue : $[0,1] \to \mathbb{R}$ et on identifie $f(x) = px[p-qx] + pqx(1-x)$. Ainsi

$$S_n(p,q) \sim (n/p)^3 \int_0^1 px[p-qx] + pqx(1-x)dx = (n/p)^3(p^2/2 - pq/6) = (n^3/2p^2)(p-(q/3))$$

La probabilité $u_n(r)$ s'obtient en ajoutant la contribution des couples tels que $a(Y_n) < a(X_n)$ et en divisant par n^4 pour appliquer la formule, valable pour la loi uniforme :

probabilité = nombres de cas favorables / nombre de cas total.

Cela nous mène à l'estimation, valable pour $p \geqslant q > 0$,

$$u_n(r) \sim \frac{p-(q/3)}{p^2 n}$$

Un très bon candidat pourrait réécrire cette formule sous la forme

$$u_n(r) \sim \frac{f(p/q)g(p/q)}{n}$$

avec $f(p/q) = 1/p$, $g(p/q) = 1 - (q/3p)$ et remarquer que si r et r' sont proches en tant que réels, $g(r)$ et $g(r')$ seront proches mais $f(r)$ et $f(r')$ pourront être très différents : prendre par exemple $r = 1 = 1/1$ et $r' = 2023/2022$. En quelque sorte, g est associé aux propriétés macroscopiques du rationnel r et f est associé à ses propriétés microscopiques.

Pour le cas général, avec $r = p/q$, $p \wedge q = 1$, $pq \neq 0$, on peut exprimer

$$u_n(r) \sim \frac{s-(t/3)}{s^2 n}$$

avec $s = \max(|p|,|q|)$, $t = \min(|p|,|q|)$.

2) La probabilité à estimer est donnée par la même formule

probabilité = nombres de cas favorables / nombre total de cas

Le nombre total de cas est le nombre de quadruplets de $\{1,2\dots n\}^2$, c'est donc n^8.

L'ensemble des cas favorables peut être partitionné en 4 sous-ensembles, suivant que les droites sont horizontales, verticales, de pente > 0 ou de pente < 0. Le sous-ensemble avec pentes > 0, pente de la forme p/q, peut être partitionné en 2 suivant que $p \geqslant q$ ou $p < q$. Comme on cherche une estimation sous forme de O, les symétries déjà relevées permettent de se restreindre au cas de pente p/q avec $p \geqslant q > 0$.

Le nombre de cas favorables dans ce sous-ensemble est alors

$$\sum_{p\geqslant q>0, p\wedge q=1} (2S_n(p,q))^2$$

Or en reprenant le calcul fait dans la question 1) et en majorant grossièrement, on trouve

$$S_n(p,q) \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor n/p\rfloor} k[pn+qn] \leqslant n^3/2p$$

d'où

$$\sum_{p\geqslant q>0, p\wedge q=1} (2S_n(p,q))^2 \leqslant n^6 \sum_{p\leqslant n}\sum_{q\leqslant p} 1/p^2 \leqslant n^6 \sum_{p\leqslant n} 1/p = O(n^6 \log n)$$

ce qui donne le résultat.

Une généralisation naturelle est la suivante : si on prend $2k$ points aléatoires indépendants $A_1, B_1, \dots A_k, B_k$ avec $k \geqslant 3$ et qu'on veut estimer la probabilité que les droites $(A_1B_1), \dots (A_kB_k)$ soient parallèles, le même raisonnement qu'à la question 2 amène à s'intéresser à la quantité

$$\sum_{p\geqslant q>0, p\wedge q=1} (2S_n(p,q))^k \leqslant n^{3k} \sum_{p\leqslant n}\sum_{q\leqslant p} 1/p^k \leqslant n^{3k} \sum_{p\leqslant n} 1/p^{k-1} = O(n^{3k})$$

et on conclut que la probabilité que les k droites soient parallèles est $O(1/n^k)$. Par rapport à la question 2 où on obtenait $O(\log n/n^2)$, on voit que le facteur $\log n$ n'apparaît que pour $k=2$. On pourrait aussi remarquer que pour $k \geqslant 3$, la probablité que les k droites soient horizontales est $\sim 1/n^k$ et que donc, conditionnellement à l'événement que les droites sont toutes parallèles, la probabilité qu'elles soient toutes horizontales est bornée inférieurement par une constante strictement positive.

Un excellent candidat ayant terminé la question 2 aurait pu se voir proposer cette généralisation mais il n'était pas nécessaire d'établir cette généralisation pour obtenir une très bonne note.