

## Composition de Mathématiques A, Filières MP, MPI (XLSR)

### 1. COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Le sujet de cette année était l'étude de l'algèbre des quaternions, introduite comme une sous-algèbre réelle de  $M_2(\mathbb{C})$ . La dernière partie concernait la classification des algèbres réelles algébriques sans diviseur de zéro. Une autre version de cette classification concerne les algèbres munies d'une norme multiplicative, et nécessitait un résultat intermédiaire sur les normes euclidiennes dans  $\mathbb{R}^2$ .

Les questions du sujet étaient bien posées et précises, et les réponses attendues, sans être évidentes, ne nécessitaient en général pas de rédactions complexes de plusieurs pages ni des calculs fastidieux. Elle nécessitaient d'intégrer les notations proposées par l'énoncé ainsi que les différents résultats obtenus au cours du sujet. Le jury tient d'ailleurs à préciser que l'utilisation de résultats de questions antérieures nécessite de faire une référence précise à la fois à la question et au résultat utilisé. Une formulation vague du type "d'après les résultats précédents" ou encore "d'après les résultats de la partie 1" n'est pas suffisamment précise pour être valorisée.

Le sujet était très long, et pour les parties 3 et 4 seules les questions les plus faciles ont été généralement traitées. Il n'était donc pas nécessaire de traiter le sujet dans sa totalité pour avoir une excellente note. En revanche, la rédaction des questions traitées devait être rigoureuse pour avoir la totalité des points.

Si le niveau global des copies est satisfaisant, nous avons constaté certaines erreurs très problématiques. Ainsi, il a été régulièrement affirmé que le noyau d'un morphisme de groupes était l'ensemble vide, alors qu'il contient nécessairement l'élément neutre. La vérification qu'un ensemble était un sous-groupe n'a pas toujours été faite rigoureusement, certains oubliant de montrer que l'ensemble était non vide, ou vérifiant simplement la stabilité par produit. Des arguments de dimension ont été invoqués pour des groupes comme  $SO_3(\mathbb{R})$  qui n'étaient pas des espaces vectoriels, ce qui n'avait pas de sens. Pour étudier la continuité d'une application, ou montrer le caractère fermé d'un ensemble, beaucoup n'ont pas pris la peine de réfléchir aux normes sur les différents espaces. Puisque les espaces étaient de dimension finie, toutes les normes étaient équivalentes, mais il était important de le spécifier, et éventuellement de choisir une norme pour mener à bien le raisonnement.

Rappelons enfin, comme chaque année, quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). De plus, un soin minimal et une écriture lisible sont attendus. Rappelons enfin que, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires. La stratégie de survoler le sujet en ne répondant qu'aux questions les plus simples ne pouvant aboutir à une note correcte.

#### Statistiques :

- . Sur les 1796 copies des candidats français de la filière MP, la moyenne globale est de 9,37/20 et un écart-type de 3,62.
- . Sur les 229 copies des candidats français de la filière MPI, la moyenne globale est de 9,19/20 et un écart-type de 3,49.

## 2. EXAMEN DÉTAILLÉ DES QUESTIONS

### Partie 1.

- 1a. La stabilité par multiplication a bien été traitée, mais le calcul explicite de  $Z^*$  a trop souvent été erroné.
- 1b. Il était important de noter que l'énoncé demandait l'inversibilité dans l'algèbre  $\mathbb{H}$ , et non l'inversibilité en tant que matrice.
- 1c. Question bien traitée, avec plus ou moins de simplicité dans la rédaction.
- 2a. Voir que la fonction  $N$  était égale au déterminant simplifiait grandement cette question.
- 2b. Question bien traitée. Tous les critères d'un sous-groupe devaient être vérifiés, ce qui n'a pas toujours été le cas.
- 3a. Question qui n'a pas posé de difficulté.
- 3b. Question bien traitée, au moins la première partie.
4. La connexité par arcs n'a pas toujours été bien justifiée.
- 5a. La question pouvait se résoudre par des calculs explicites, généralement bien faits.
- 5b. Le point important de la question était de vérifier l'orthogonalité de la famille.

### Partie 2.

6. La description explicite du noyau a rarement été donnée correctement.
7. La continuité a rarement été montrée rigoureusement.
- 8a. Question bien traitée.
- 8b. Question calculatoire, bien traitée par les candidats l'ayant abordée.
9. Question avec plusieurs points à démontrer. La surjectivité nécessitait un résultat de réduction pour les matrices de  $SO_3(\mathbb{R})$ , ce qui a parfois été utilisé. Il fallait ensuite justifier que la base trouvée était de la forme précédente, ce qui a rarement été fait.
- 10a. Question rarement traitée.
- 10b. De multiples sous-questions. Les candidats en ont souvent traités quelques-unes, rarement en totalité.
11. Question qui nécessitait de bien vérifier tous les critères d'un sous-groupe.
12. Cette question nécessitait de vérifier de nombreux points : appartenance à  $\mathbb{H}^{im}$  des vecteurs, calcul de leur norme, caractère orthogonal, puis direct de la famille.

Certaines copies ont vérifié quelques-uns de ces points.

13a et 13b. Questions très rarement traitées rigoureusement.

### **Partie 3.**

14a. Question bien traitée, même si la preuve du caractère fermé n'était pas toujours rigoureuse.

14b. Question bien traitée.

15. La première partie de la question a été globalement bien traitée, la seconde beaucoup moins.

16a. Question qui n'a été traitée qu'exceptionnellement.

16b. Quelques candidats sont parvenus à traiter cette question.

17-18-19. Questions très rarement traitées.

### **Partie 4.**

20a. Un faible nombre de candidats ont pensé à factoriser le polynôme annulateur en polynômes irréductibles réels. Il fallait bien utiliser l'hypothèse que l'algèbre était sans diviseur de zéro.

20b. Question qui n'a pas bien été traitée. Beaucoup de candidats ont cherché un isomorphisme envoyant  $i$  sur  $x$ , alors que les polynômes annulateurs de  $i$  et  $x$  ne sont pas égaux en général.

21. Question très rarement traitée. Il suffisait pourtant de considérer l'image de  $i$  par l'isomorphisme trouvé précédemment.

22a. et 22b. Questions très bien traitées par les candidats ayant eu le courage de les aborder.

23. Une inclusion était abordable, l'autre beaucoup plus subtile.

24a. La première partie de la question a pu être abordée, rarement la seconde.

24b. et 24c. Questions qui n'ont été traitées qu'exceptionnellement.

25.-27. Partie qui n'a quasiment jamais été traitée.