Filière Universitaire Française

Épreuve orale de Mathématiques (mineure)

L'objectif principal de ce rapport est de fournir aux futures candidates et candidats, enseignantes et enseignants des indications les plus précises et les plus explicites possibles sur l'épreuve orale de mathématiques mineure. Il s'agit donc de :

– décrire le déroulement de l'épreuve ;
– détailler les critères d'évaluation ;
– donner l'ensemble des sujets posés.

Nous espérons en effet que cela puisse permettre de forger une meilleure vision de ce qui se passe lors de cet oral, ainsi que d'aider l'ensemble des candidates et candidats, enseignantes et enseignants, pour le préparer.

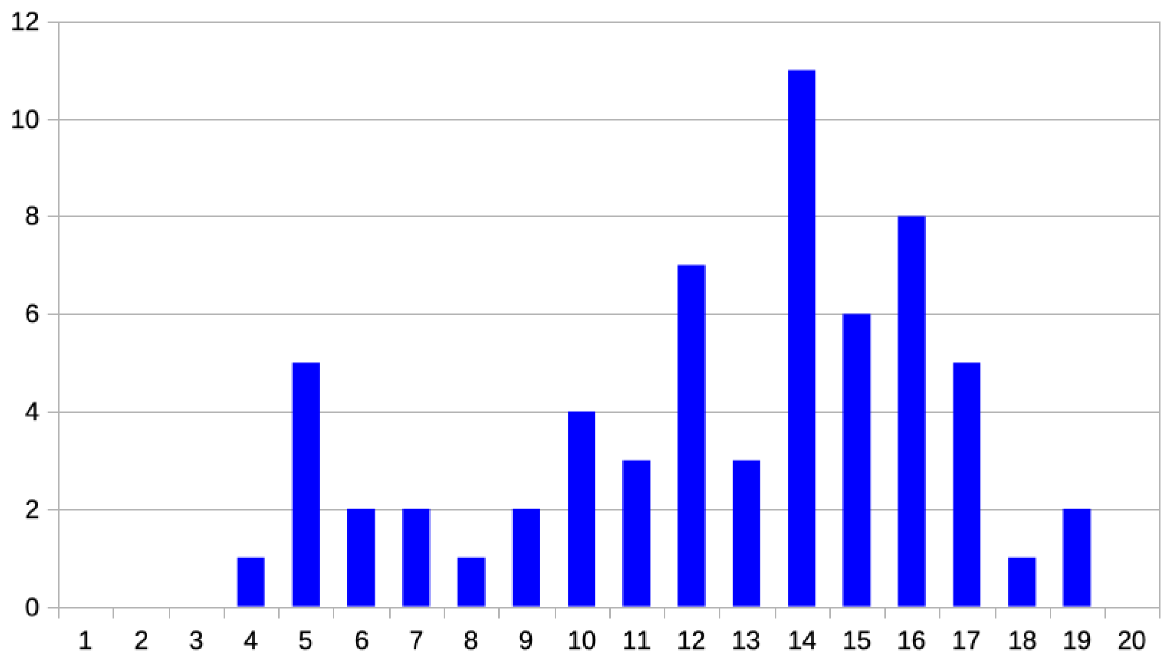

Figure 1 – Histogramme des notes obtenues à cet oral des 63 candidates et candidats admissibles à l'issue de l'étude des dossiers et qui se sont présentés à l'oral. La moyenne est de 12.5/20, la médiane de 13/20 et l'écart-type de 3.9.

Table des matières

1 Type d'épreuve

Format de l'épreuve. L'épreuve dure 50 minutes au tableau, sans préparation. Elle est passée par tous les candidats et candidates admissibles qui sont inscrites en L3 de spécialité non mathématique. Son programme porte sur le programme de L1-L2 en mathématique et, évolution de cette année, *également sur les notions essentielles indiquées dans l'annexe de la notice destinée aux candidats de la Filière universitaire française*. Elle est notée sur 20, et porte un coefficient 6 (le total des coefficients pour l'ensemble des épreuves est 40).

Insistons sur le fait qu'à compter de cette année, l'interrogation peut porter sur les notions essentielles indiquées dans l'annexe de la notice destinée aux candidats de la Filière universitaire française.

Déroulement. Une fois dans la salle d'interrogation, la candidate ou le candidat est invité à signer la feuille d'émargement après vérification d'une pièce d'identité.

Ensuite, le texte suivant, ou une légère variante, était systématiquement dit :

« Cet oral va durer 50 *minutes environ. Nous allons réfléchir à un ou plusieurs exercices de difficultés variables. À chaque fois l'exercice n'est qu'un prétexte à la discussion mathématique, et c'est plutôt elle qui compte. C'est normal s'il y a des points délicats ou des difficultés, et arriver à la fin de l'exercice n'est pas l'objectif principal. »*

L'examinateur dicte l'énoncé d'un exercice à recopier au tableau, et l'oral commence. Après quelques moments de réflexion laissés à la candidate ou au candidat, l'examinateur lui demande d'expliquer où en sont ses réflexions. À partir de ce moment-là, le déroulement de l'oral n'est plus uniforme, l'examinateur s'adaptant aux candidates et candidats :

- lorsqu'une piste est explorée, si elle semble intéressante, l'examinateur laisse d'abord faire sans intervention (toujours bienveillant, il ne cherche pas volontairement à piéger) ;
- en cas de blocage, la discussion est amenée d'abord de manière volontairement floue (*Qu'en pensez-vous ?*, *Qu'est-ce qui vous embête ?*, etc.), pour éventuellement ensuite être précisée (une étude d'un cas particulier ou d'une faible dimension peut par exemple être proposée) ;
- tout au long de l'oral, l'examinateur rebondit naturellement sur ce qui est dit par la candidate ou le candidat, et parfois pose des questions additionnelles, souvent en lien avec ce qui est abordé (par exemple pour savoir ce qui se passe si une hypothèse est relâchée, si on

peut trouver un exemple vérifiant les conditions de l'énoncé, pour préciser explicitement un résultat du cours utilisé et esquisser sa démonstration, etc.)

Cet exercice « principal » était parfois entièrement traité ou parfois interrompu, auquel cas un exercice plus court était proposé afin d'aborder une autre thématique.

Exercices posés. Dans un souci de transparence, l'ensemble des exercices posés figure à la fin de ce rapport. Nous insistons toutefois sur le fait que, dans le contexte de l'épreuve orale, ces sujets ne doivent pas être considérés comme des problèmes écrits, tant la discussion avec l'examinateur est indissociable de l'énoncé.

Les exercices ont été choisis en fonction du critère suivant :

– difficulté très progressive : les exercices portent sur des concepts ou objets fondamentaux du programme, ce qui permet d'évaluer la connaissance du cours, et nécessitent de mettre en oeuvre des raisonnements avec parfois plusieurs étapes, ce qui permet d'évaluer l'autonomie, la réactivité et le potentiel.

Insistons sur le fait que l'objectif principal n'est pas nécessairement d'arriver au bout de l'exercice, et que la note finale n'est ni une fonction croissante, ni une fonction simple, de l'avancement de l'exercice (voir Section 2 pour davantage de précisions). En deux mots, on pourrait dire qu'il est attendu que les candidates et candidats cherchent et explorent avec curiosité afin de comprendre et d'avancer vers une solution, sans forcément la trouver à la fin de l'oral, en montrant la maîtrise de leur cours.

Chaque exercice a été donné au maximum deux fois à la suite.

2 Choix des critères d'évaluation

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la maîtrise des notions que les candidates et candidats manipulent, ainsi que leur potentiel. Insistons sur ce dernier aspect : le jury est pleinement conscient qu'il n'intérroge pas des spécialistes en mathématiques, et ne s'attend pas à une aisance aussi développée que chez des étudiants et étudiantes spécialisées en mathématiques. Il essaye surtout d'évaluer le potentiel des candidates et candidats à suivre à l'École polytechnique un enseignement scientifique à la fois pluridiscplinaire et exigeant.

Critères choisis. À cet effet, plusieurs critères ont été définis :

– maîtrise du cours ;
– capacité à se rendre compte des incohérences et à se corriger ;
– autonomie ;
– réactivité aux indications,

qui permettait d'obtenir une note « théorique » sur 20 servant d'indicateur (de comparaison et de justesse) pour la note finale sur 20, issue des ressentis lors de l'oral. Ce choix de critères vise à de valoriser une diversité de qualités requises pour suivre une scolarité à l'École polytechnique, utiliser ou faire des mathématiques, avec succès.

Ainsi, venir à bout de l'exercice n'est pas l'objectif principal, et il n'y a pas une unique manière d'obtenir une bonne note. Insistons sur le fait que la note est fonction des ressentis et des critères que nous avons choisis, et reflète la performance durant un oral de 50 minutes : elle n'est en aucun cas un jugement de valeur objectif (qui n'a pas vraiment de sens) sur la qualité d'une ou d'un candidat. Précisons aussi que ces choix n'engagent que le jury actuel, et peuvent évoluer à l'avenir.

Voir la Figure 1 pour l'histogramme des notes obtenues à cet oral des 63 candidates et candidats admissibles qui ont passé l'épreuve. La moyenne est de 12.5/20, la médiane de 14/20 et l'écart-type de 3.9. Ces statistiques sont très similaires à celles de la session 2023 de l'année dernière, pour laquelle moyenne était de 12.8/20, la médiane de 13/20 et l'écart-type de 3.9.

La principale différence notable est que cette année il y a eu moins d'abandons (63 personnes se sont présentées à l'oral, contre 55 l'année dernière).

Précisions sur les critères. Détaillons de manière plus précise les attentes du jury par rapport aux critères évoqués précédemment.

- Maîtrise du cours. La connaissance et la maîtrise des résultats et des démonstrations du programme est *fondamentale*. Souvent, à un moment lors de l'oral, l'examinateur demande de détailler une étape du raisonnement jusqu'à isoler un résultat du cours, dont l'énoncé peut être demandé à être explicitement écrit au tableau et dont la preuve peut également être demandée. Le fait de poser des questions de cours est quasi-systématique, et n'augure en rien un oral réussi ou non.
- Capacité à se rendre compte des incohérences et à se corriger. Une erreur (non grossière) en tant que telle n'est pas pénalisée (l'examinateur est conscient de la difficulté de l'épreuve sans préparation et des impacts du stress). La candidate ou le candidat se rend parfois compte seul de l'erreur et corrige (ce qui est positif), sinon l'examinateur est amené à l'aider en ce sens, et c'est sa réaction qui est évaluée. Le cas échéant, l'examinateur s'attend à ce que la candidate ou le candidat trouve précisément l'endroit où l'erreur a été commise, en fasse éventuellement une analyse rapide (se rende compte par exemple qu'une hypothèse supplémentaire était peut-être implicitement supposée, ou donne un contre-exemple, etc.) puis se corrige.
- Autonomie. Une des premières étapes de recherche de la quasi-totalité des exercices posés passe par des applications proches du cours (si ce n'est pas le cas, l'examinateur posera à un moment ou un autre des questions de ce type). La maîtrise des techniques très proches du cours est ainsi évaluée. L'examinateur évalue les réactions des candidates et des candidats dans le contexte d'une situation mathématique nouvelle, en particulier leur autonomie et leur prise d'initiative. Il s'agit idéalement, après un temps de réflexion, de pouvoir esquisser une ou plusieurs pistes ou stratégies et d'évaluer leur pertinence (quitte à se lancer dans une piste et se rendre compte finalement qu'elle n'aboutit peut-être pas).
- Réactivité dans la discussion. La capacité à avoir un dialogue mathématique, en comprenant et en réagissant aux remarques de l'examinateur, est évaluée. En particulier, il est préférable d'être ouvert aux conseils de l'examinateur, sans chercher systématiquement son acquiescement ou son approbation pour continuer.

Il est important de réaliser que la perception qu'a la candidate ou le candidat de l'oral et pendant l'oral est souvent très imparfaite : comme dit explicitement au début de l'oral, c'est normal s'il y a des points délicats et nous encourageons les candidates et candidats à rester concentrés et motivés jusqu'au bout de l'oral (il est tout à fait possible d'obtenir une très bonne note en ayant bloqué au tout début).

Enfin, mentionnons qu'il est bien sûr agréable pour le jury d'avoir en face de lui des candidates et candidats qui sont à l'aise à l'oral, qui prennent la parole et qui expliquent par eux-mêmes l'état de leurs réflexions. Mais l'attitude des candidates et candidats qui pourraient être stressés ou réservés en début d'oral n'est absolument pas pénalisée : le jury, toujours bienveillant, essaye de les mettre en confiance pour qu'ils puissent également exprimer toutes leurs qualités.

Quelques conseils concernant l'épreuve. Les candidates et candidats que nous avons interrogés sont globalement bien préparés à l'épreuve. Nous donnons ici quelques conseils généraux, que nous espérons constructifs, compte tenu du format de l'épreuve.

- Un certain nombre de candidats et de candidates prennent la parole sitôt l'exercice recopié et engagent la discussion avec l'examinateur, puis pendant l'oral réfléchissent à voix haute sans laisser aucun blanc. Cette attitude ne nous semble pas bien adaptée à cette épreuve : en effet, si, en tant que telle, elle n'est bien entendu ni pénalisée ni valorisée, nous avons constaté que ces candidates et candidats ont souvent tendance à proposer une succession de pistes différentes à la chaîne, ne prenant pas le temps de la réflexion, cherchant l'acquiescement de l'examinateur et commettant des erreurs sans les corriger, ce qui finalement les dessert. Le fait que le silence s'installe pendant quelques minutes n'est en aucun cas un problème, bien au contraire. Inversement, plusieurs candidates et candidats restent muets aux sollicitations de l'examinateur (de type *Qu'est-ce que vous embête ? Qu'est-ce qui vous bloque ?*), rendant la discussion délicate, ce qui finalement les dessert aussi. Il s'agit donc de trouver un équilibre permettant une réflexion et une discussion optimales.
- Dans le feu de la discussion, un nombre non négligeable de candidates et de candidats sont débloqués et concluent la résolution de l'exercice trop rapidement à l'oral, en passant trop rapidement sur des points délicats ou en faisant des erreurs. Il ne faut pas hésiter à prendre le temps de la réflexion ou le temps de détailler le raisonnement au tableau. De même, lorsque des calculs assez poussés apparaissent, il vaut mieux éviter de se précipiter et d'effectuer régulièrement des vérifications de cohérence (par exemple, si une sommation $\sum_{i=1}^{n}$ intervient, on peut vérifier que pour $i = 1$ et $i = n$ tout est cohérent).
- Certaines parties du raisonnement peuvent faire penser (parfois à juste titre, parfois non) à des situations déjà rencontrées. Il faut alors faire attention à ne pas se précipiter en utilisant des demi-souvenirs qui ne sont en fait pas adaptés.
- La gestion du tableau est globalement bien maîtrisée. L'idéal est d'écrire l'énoncé de l'exercice en haut à gauche, en laissant suffisamment de place disponible. Plus généralement, il s'agit de trouver un compromis entre un brouillon et une copie, de sorte que les grandes étapes du raisonnement puissent être accessibles simplement en regardant

le tableau. En particulier, on s'attend à ce que les éléments essentiels de logique s'y retrouvent (introduction des variables, quantificateurs, etc.). Enfin, nous déconseillons aux candidates et candidats d'effacer intempestivement des éléments partiels corrects alors qu'il reste de la place disponible (ils pourraient servir, on ne sait jamais !).

Quelques conseils, à destination des candidates et candidats. Il n'y a bien sûr pas de « recette miracle » permettant la résolution d'exercices de mathématiques. Donnons toutefois quelques conseils qui pourraient être utiles (indépendamment des résultats aux concours !) :

– la connaissance du cours est fondamentale, ainsi qu'une petite technicité calculatoire ;

– pour débuter la recherche d'exercices, en fonction des sujets, il est souvent judicieux de commencer par des cas particuliers, d'ajouter éventuellement une hypothèse, de faire un dessin, etc. ;

– dans le cadre d'un travail individuel, en abordant un exercice , il nous semble préférable de prendre le temps de le chercher, et, avant de regarder sa solution, faire le bilan des différentes tentatives. Après avoir regardé la solution, il peut être profitable de procéder à une sorte de rétro-ingénierie en se demandant dans quelle mesure la solution pourrait être « naturelle » en décortiquant la succession des idées sous-jacentes.

* * *

3 Exercices posés

Dans le contexte de l'épreuve orale, nous insistons sur le fait que ces sujets ne doivent pas être considérés comme des problèmes écrits, tant la discussion avec l'examinateur est indissociable de l'énoncé.

* * *

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée telle que $2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Est-ce que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge nécessairement ?

Exercice 2. Trouver toutes les matrices triangulaires réelles qui commutent avec leur transposée. Que se passe-t-il pour des matrices triangulaires complexes ?

Exercice 3. Soit E l'ensemble des applications f de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) = f(1) = 0$. Soit F l'ensemble des applications f de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour $f \in F$, on pose

$$I(f) = \int_0^1 e^t(f(t)^2 + f'(t)^2)dt.$$

(1) Soit $g \in E$. Calculer la dérivée en 0 de $\lambda \mapsto I(f + \lambda g)$.

(2) Montrer que I possède un minimum sur F et déterminer les points en lequel il est atteint.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et p un projecteur de E. On note

$$C(p) = \{f \in \mathcal{L}(E) : p \circ f = f \circ p\}.$$

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $f \in C(p)$ si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $(\cos(1/n))^{n^\alpha}$.

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pose $f(P) = P - P'$ pour tout $P \in E$.

(1) Est-ce que f est bijective ?

(2) Est-ce que f est diagonalisable ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C_1 on suppose que $f'(x)/f(x) \sim 2/x$ lorsque $x \to \infty$. Montrer que

$$\int_0^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{3}.$$

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

(1) Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$\dim(F+G) + \dim(F\cap G) = \dim F + \dim G.$$

Soient f, g des endomorphismes de E tels que $f + g$ est l'identité et $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant n$.

(2) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans E et que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.
(3) En déduire que f et g sont des projecteurs.

Exercice 9. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues. On pose

$$h(x) = \sup_{t \in [0,1]} (f(t) + x g(t))$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que h est lipschitzienne.

Exercice 10. Soit $n \geqslant 3$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire les jetons au hasard et sans remise, jusqu'à ce que le numéro tiré soit inférieur au numéro précédemment tiré ou que l'urne soit vide. On note X_n le nombre de tirages effectués.

(1) Trouver la loi de X_n.
Indication. On pourra calculer $\mathbb{P}(X_n > k)$.
(2) Calculer la limite de $\mathbb{E}[X_n]$ quand $n \to \infty$.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = f$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 12. Soit (x_n) une suite de nombre réels tels que $\sqrt{n}(x_n - x) \to y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Trouver la limite de $\sqrt{n}(g(x_n) - g(x))$.

Exercice 13. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels. On suppose que $a_n \to 0$ et que la série de terme général (b_n) est absolument convergente. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement que la série de terme général (b_n) converge ?

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire de Poisson. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n).$$

Exercice 15. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4q \leqslant 0$. Montrer que

$$\det(A^2 + pAB + qB^2) \geqslant 0.$$

Exercice 16. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \geqslant 0$

$$\int_0^x (x - 3t) f(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 17. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f(x)^n dx \right)^{1/n}.$$

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\pm\infty} f = \infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et g un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \circ g = \mathrm{Ker}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g)$.

(2) Soit f un projecteur de E et $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer que $\mathrm{Im}\, f \circ g = \mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g)$.

Exercice 20. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to\to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{x+y}.$$

Exercice 21. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(z) = \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 22. Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés, dont une et une seule convient. Il essaie au hasard les clés les unes après les autres. Déterminer la loi du nombre d'essais effectués jusqu'à ouverture de la porte.

Exercice 23. (1) Soit f_n une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

(2) Est-ce que la suite de fonctions $g_n(x) = x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 24. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E.

(1) Montrer que
$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

(2) Montrer que
$$\dim(F+G)^2 + \dim(F \cap G)^2 \geqslant (\dim F)^2 + (\dim G)^2$$
et étudier le cas d'égalité.

Exercice 25. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to\infty}{\sim} n!.$$

Exercice 26. Soient $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ deux séries entières à coefficients strictement positifs et de rayon de convergence infini. On suppose que $a_n/b_n \to L$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$
a une limite quand $x \to \infty$.

Exercice 27. On considère n personnes qui jettent simultanément une pièce de monnaie ($n \geqslant 3$). Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour l'obtention d'un vainqueur. Déterminer la loi de X, et donner son espérance et sa variance.

Exercice 28. Lors d'une compétition de saut en hauteur, une athlète tente de franchir des barres successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$ n'a droit qu'à un seul essai par barre. On suppose les sauts indépendants, et que la probabilité de réussite du n-ième saut est $1/n$. L'athlète s'arrête au premier échec.

(1) On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. Trouver la loi de X.

(2) Déterminer la fonction génératrice de X.

(3) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 29. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^{2024}.$$

Exercice 30. Etudier le comportement de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \sqrt{k/n^3})$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 31. Soient $k, n \geqslant 1$ des entiers. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, k\})$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_n = \mathrm{Card}(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n)$.

Exercice 32. Étudier le comportement de la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n - e^{-\frac{1}{u_n}}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 33. Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. On pose pour $1 \leqslant k \leqslant n$

$$Y_k = X_1 \cdots X_k.$$

(1) Démontrer que les variables aléatoires $Y_1, \cdots, Y_n$ sont indépendantes.

(2) Que se passe-t-il si la loi n'est plus uniforme sur $\{-1, 1\}$?

Exercice 34. Soit $M_1, \ldots, M_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux. Montrer que

$$M_1 M_2 \cdots M_n = 0.$$

Exercice 35. Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\mathrm{rg}\, v \circ u = \mathrm{rg}\, u$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \{0\}$.

Exercice 36. (1) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt = c|a|.$$

(2) Soient X, Y deux variables aléatoires réelles à support fini, indépendantes et de même loi. Montrer que
$$\mathbb{E}[|X-Y|] \leqslant \mathbb{E}[|X+Y|].$$

Exercice 37. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E$ si et seulement si $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$.

Exercice 38. Soit $\lambda \in]0,1[$. Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = f(\lambda x).$$

Exercice 39. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E,

(ii) $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Exercice 40. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M \cdot M^T \cdot M = I_n$.

Exercice 41. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(f(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ est une famille libre

(1) Montrer que f est un isomorphisme.

(2) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $g = P(f)$.

Exercice 42. On définit une suite de fonctions sur $[0,1]$ par $f_0(x) = 1$ et
$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)dt.$$

Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n).

Exercice 43. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On suppose que $f^5 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 44. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Montrer qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversibles telles que $M = A + B$.

(2) Montrer qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

Exercice 45. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que
$$\sup_{[0,1]} f = \sup_{[0,1]} g.$$

Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.