CONCOURS D'ADMISSION 2024

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 1_Automne

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Problème : fonctions presque périodiques.

L'objectif de ce problème est d'étudier les propriétés d'une classe de fonctions qui généralisent les fonctions périodiques. Chaque partie s'appuie sur les résultats des parties précédentes. Il est possible d'admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Partie 1 : préliminaires sur la compacité.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On notera d la distance associée : $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$, et $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.

On rappelle qu'une partie A de E est compacte si de toute-suite d'éléments de A on peut extraire une sous suite convergente dans A. On dit qu'un sous-ensemble A de E est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de A par des boules de rayon ε : $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

1. Montrer que si $A \subset B$ et B est précompact, alors A est précompact.

2. (a) Soit A une partie de E et $\varepsilon > 0$ tels qu'il n'existe pas de recouvrement fini de A par des boules de rayon ε. Construire par récurrence une suite de $A^{\mathbb{N}}$ sans valeur d'adhérence.

(b) En déduire que si A est compact alors A est précompact.

3. (a) Soit A une partie précompacte de E et $\varepsilon > 0$. Montrer que toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0} \in A^{\mathbb{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ telle que pour tous $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) < \varepsilon$.

(b) En déduire que toute suite de $A^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite de Cauchy.

(c) Conclure que A est compact si et seulement si A est précompact et complet.

Partie 2 : préliminaires sur la convergence uniforme.

Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) l'espace des fonctions bornées (resp. continues et bornées) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on définit la norme uniforme de f par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.

4. Montrer que $(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

5. Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f, alors f est continue.

6. En déduire que $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Dorénavant, l'espace $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est vu comme un espace normé, relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pourra admettre sans démonstration le fait que cet espace est complet.

7. Montrer qu'une partie A de $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est précompacte si et seulement si de toute suite $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 : fonctions périodiques.

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, et qu'une fonction est dite périodique si elle est T-périodique pour un certain $T > 0$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a(f)$ la fonction $x \mapsto f(x+a)$ et

$$A(f) = \{\tau_a(f),\ a \in \mathbb{R}\}$$

l'ensemble des translatées de f. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $e_\lambda : x \mapsto \exp(i\lambda x)$.

8. Montrer qu'une fonction continue périodique est bornée et uniformément continue.

9. On suppose toujours dans cette question que f périodique. Montrer que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie par $a \mapsto \tau_a(f)$ est continue (on rappelle que $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$). En déduire que $A(f)$ est compact.

Réciproquement on peut montrer que si f est une fonction continue bornée telle que $A(f)$ est compact, alors f est périodique.

10. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels distincts. Démontrer que la famille $\{e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n}\}$ est libre. (Indication : on pourra commencer par le cas $n = 2$ et utiliser la dérivation.)

11. (a) Résoudre l'équation $\cos(x) + \cos(x\sqrt{2}) = 2$.

(b) L'ensemble des fonctions périodiques est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$?

12. Déterminer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(\sin(x) + \sin(x\sqrt{2})\right)$.

Partie 4 : fonctions presque périodiques.

Une fonction continue et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite presque périodique si l'ensemble $A(f)$, défini à la partie précédente, est précompact. On note $\mathcal{PP}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions presque périodiques.

13. Montrer que f est presque périodique si et seulement si de toute suite $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ telle que $\tau_{a_{\varphi(n)}}(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

14. Montrer que si f et g sont presque périodiques, alors $f+g$ et fg sont presque périodiques.

15. Montrer que si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions presque périodiques convergeant uniformément vers f alors f est presque périodique (remarquer que $\|\tau_a(f_n) - \tau_a(f)\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$).

16. En déduire que $\mathcal{PP}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui contient les fonctions périodiques.

On peut montrer que $\mathcal{PP}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ayant cette propriété.

Partie 5 : solutions bornées d'équations différentielles.

17. **Question préliminaire :** soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\delta > 0$ telles que pour tout $s \leqslant 0$, $|\varphi(s)| \leqslant C \exp(\delta s)$. On fixe $t \in \mathbb{R}$.

(a) Pour toute suite (R_n) tendant vers $-\infty$, montrer que la suite $\left(\int_{R_n}^{t} \varphi(s) ds\right)$ est de Cauchy, et que sa limite ne dépend pas de (R_n). On notera cette limite $\int_{-\infty}^{t} \varphi(s) ds$.

(b) Montrer que $\int_{-\infty}^{t} \varphi(s) ds$ tend vers 0 quand $t \to -\infty$.

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle $x' = ax + b$, où a et b sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) \leqslant -\delta$. On notera $A(t) = \int_0^t a(s) ds$.

18. Rappeler l'expression des solutions de l'équation différentielle $x' = ax$, et déterminer leur limite en $-\infty$ et $+\infty$.

19. Montrer que l'équation différentielle $x' = ax + b$ admet au plus une solution bornée.

20. On suppose que la fonction b est bornée. Montrer que l'expression

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} b(s) e^{A(t)-A(s)} ds$$

est bien définie et est l'unique solution bornée de l'équation différentielle $x' = ax + b$.

On suppose dorénavant que a est une constante strictement négative. On posera $a = -\delta$.

21. Montrer que si b est périodique, l'unique solution bornée de l'équation $x' = ax + b$ est périodique.

22. Montrer que si b est presque périodique, l'unique solution bornée de l'équation $x' = ax + b$ est presque périodique. (Indication : on pourra chercher à majorer $|x(t + \alpha) - x(t)|$ en fonction de $\|\tau_\alpha b - b\|_\infty$.)