CONCOURS D'ADMISSION 2024

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Ce sujet comporte un exercice et un problème indépendants. La clarté et la concision de la rédaction entreront pour une grande part dans la notation des copies.

Exercice : analyse.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ on pose
$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a}.$$

1. Déterminer en fonction de a le domaine de définition D_a de la fonction f_a.

2. Montrer que pour tout $a > 0$, f_a est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

3. Déterminer l'ensemble E_1 des valeurs de a telles que f_a est continue à gauche en 1.

4. Montrer que si $a \notin E_1$ on a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

5. Déterminer l'ensemble E_{-1} des valeurs de a telles que f_a est continue à droite en -1.

6. Déterminer l'ensemble E'_{-1} des valeurs de a telles que f_a est dérivable à droite en -1.

7. On admet que $f_2(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $f_2(-1)$ et $f_2'(-1)$.

◇

Problème : algèbre linéaire.

On note $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à m lignes et n colonnes, et $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. La transposée d'une matrice M est notée $M^\intercal$, la trace d'une matrice carrée est notée $\mathrm{tr}(M)$, et son spectre est noté $\mathrm{Sp}(M)$.

Partie 1 : Étude des endomorphismes et matrices de rang 1

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de rang 1. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\lambda : E \to \mathbb{R}$ et un vecteur $y \in E$, tous deux non nuls, tels que pour tout $x \in E$ on a $u(x) = \lambda(x)y$.

2. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de rang 1, il existe $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et $\Lambda \in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ $A = Y\Lambda^\intercal$.

3. Dans cette question on considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et on étudie sa diagonalisabilité.

  a. Montrer que si A est diagonalisable, alors $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

  b. Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A (on pourra calculer AY, où $A = Y\Lambda^\intercal$).

  c. En déduire que si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors A est diagonalisable.

Partie 2 : Un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on s'intéresse à l'application

$$\begin{aligned} \phi_A : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\longrightarrow AM \quad . \end{aligned}$$

4. Montrer que ϕ_A est linéaire, et qu'elle est inversible si et seulement si A l'est.

5. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\phi_A(M) = \lambda M$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

b. En déduire que $\mathrm{Sp}(\phi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

6. a. Soit maintenant λ une valeur propre de A, X un vecteur propre associé, et M une matrice de rang 1 d'image $\mathrm{Vect}(X)$. Montrer que M est vecteur propre de ϕ_A.

b. En déduire que $\mathrm{Sp}(\phi_A) = \mathrm{Sp}(A)$.

c. Déterminer l'espace propre de ϕ_A associé à la valeur propre λ et calculer sa dimension.

7. Montrer que si A est diagonalisable, alors ϕ_A l'est également.

Partie 3 : Endomorphismes de $M_n(\mathbb{R})$ conservant le rang

Dans cette partie on étudie les endomorphismes de $M_n(\mathbb{R})$ qui conservent le rang, c'est à dire tels que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{rg}(\phi(M)) = \mathrm{rg}(M)$. On rappelle de la question 2 que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, alors il existe des vecteurs colonnes U et V dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $A = UV^\intercal$. Si u et v sont des vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E, on notera $u \mathbin{/\!/} v$ ("u parallèle à v") s'il existe un scalaire $c \in \mathbb{R}$ non nul telle que $u = cv$.

Questions préliminaires :

8. Montrer que deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel de dimension finie sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

9. Soient A_1 et A_2 des matrices de rang 1. On suppose que $A_1 + A_2$ est de rang 1. Montrer que pour $i = 1, 2$ on a $A_i = U_i V_i^\intercal$ avec $U_1 \mathbin{/\!/} U_2$ ou $V_1 \mathbin{/\!/} V_2$.

10. Montrer que tout endomorphisme $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le rang est un isomorphisme.

On fixe maintenant un endomorphisme $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ qui préserve le rang.

11. On se donne $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et deux matrices de rang 1 de la forme $A_1 = U_1 V^\intercal$ et $A_2 = U_2 V^\intercal$, avec $(U_1, U_2) \in M_n(\mathbb{R})^2$ et U_1 non proportionnel à U_2. Montrer qu'il existe des vecteurs colonnes $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ non nuls dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\phi(A_1) = \overline{U}_1 \overline{V}_1^\intercal$ et $\phi(A_2) = \overline{U}_2 \overline{V}_2^\intercal$, et $\overline{U}_1 \mathbin{/\!/} \overline{U}_2$ ou $\overline{V}_1 \mathbin{/\!/} \overline{V}_2$ mais pas les deux à la fois.

Dans la suite on suppose que $\overline{V}_1 \mathbin{/\!/} \overline{V}_2$.

12. On se donne maintenant un troisième vecteur $U_3 \in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et on note $\phi(U_3V^\intercal) = \overline{U}_3\overline{V}_3^\intercal$.

a. Montrer qu'on a soit $\overline{U}_1 \mathbin{/\!/} \overline{U}_3$, soit $\overline{V}_1 \mathbin{/\!/} \overline{V}_3$.

b. En raisonnant par l'absurde, en déduire que nécessairement $\overline{V}_1 \mathbin{/\!/} \overline{V}_3$.

13. Conclure qu'il existe une matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne $\overline{V}$ non nul tel que pour tout $U \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\phi(UV^\intercal) = AU\overline{V}^\intercal$.

Maintenant on fixe $U \in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et on fait varier V. On pose $AU = \overline{U}$.

14. Soit $V_2 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et non parallèle à V (vecteur qui a été fixé à la question 11).

a. Montrer que $\phi(UV^\intercal + UV_2^\intercal) = \overline{U}\,\overline{V}^\intercal + \overline{U}_2\overline{V}_2^\intercal$, avec $\overline{U} \mathbin{/\!/} \overline{U}_2$ ou $\overline{V} \mathbin{/\!/} \overline{V}_2$ mais pas les deux à la fois.

b. Supposons que $\overline{V} \mathbin{/\!/} \overline{V}_2$. Montrer qu'il existe un vecteur colonne U_0 tel que $\phi(U_0V^\intercal) = \phi(UV_2^\intercal)$ et en déduire une contradiction. Ainsi $\overline{U} \mathbin{/\!/} \overline{U}_2$.

15. En déduire qu'il existe une matrice inversible B telle que pour tous $(U,V) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on a $\phi(UV^\intercal) = AUV^\intercal B$.

16. Conclure que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\phi(M) = AMB$.

On montre de même que si à la question 11 on avait supposé $\overline{U}_1 \mathbin{/\!/} \overline{U}_2$, alors il existe des matrices inversibles A et B telles que $\phi(M) = AM^\intercal B$.

Ainsi, tout endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ conservant le rang est de la forme $M \mapsto AMB$ ou $M \mapsto AM^\intercal B$, avec A et B inversibles.

◇