# CONCOURS D'ADMISSION 2024

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

*Épreuve n°3*

# PHYSIQUE

***Durée : 3 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve***

*Les calculs numériques seront fait à la main. On se contentera d'estimations à un ou deux chiffres significatifs.*

⋆ ⋆ ⋆

# Précession des orbites planétaires

Données numériques :

| | |
|---|---|
| Constante de la gravitation universelle : | $G \ = 6.67\,.\,10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2}$ |
| Masse du Soleil : | $M_S = 2\,.\,10^{30} kg$ |
| Masse de la Terre : | $M_T = 6\,.\,10^{24} kg$ |
| Rayon de la Terre : | $R_T \ = 6400\, km$ |
| Accéleration de la pesanteur : | $g \ = 9.8\, ms^{-2}$ |
| Durée du jour : | $T_j \ = 24\, h = 86400\, s$ |

**Partie I: Orbites Képleriennes**

On étudie le mouvement d'une masse ponctuelle $m$ autour d'un astre (soit la Terre, soit le Soleil, selon les questions) de masse $M$ que l'on supposera immobile.

Le centre $O$ de l'astre sera pris comme origine d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et la position de la masse $m$ sera dénotée par $P$. On utilisera les notations suivantes: $\vec{r} = \vec{OP}$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ où $r$ est la norme de $\vec{r}$.

1. Écrire la loi de la dynamique de Newton pour le mouvement de la masse $m$.

2. Montrer que l'énergie mécanique totale, $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$, est conservée au cours du mouvement.

3. Montrer que le moment cinétique $\vec{\ell} = m\vec{r} \times \vec{v}$ est constant (le symbole $\times$ désigne le produit vectoriel). En conclure que la trajectoire de $P$ est incluse dans un plan.

4. On appelera $(r, \theta)$ les coordonnées polaires, centrées en $O$, dans le plan de la trajectoire. Montrer que la conservation moment cinétique en coordonnées polaires implique

$$r^2\dot{\theta} = C$$

où $C$ est une constante que l'on exprimera en fonction de $\ell$ (la norme du vecteur $\vec{\ell}$) et de $m$.

5. Exprimer l'énergie totale $E$ en fonction de $r$, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\ell$ et les constantes $G, M, m$. En déduire que le problème est équivalent à celui d'une particule à une dimension soumise à un potentiel effectif $U(r)$ dont vous donnerez l'expression.

6. Tracer ce potentiel effectif $U(r)$. Que pouvez-vous en déduire?

a. Pour quelle valeur $r_0$, ce potentiel effectif est-il minimal ? Exprimer $r = r_0$ en fonction de $\ell, G, M, m$ et vérifier l'homogéneité du résultat. Montrer que pour $r = r_0$, la trajectoire de la masse $m$ est un cercle.

b. Calculer la vitesse de rotation $\omega_a$ sur cette trajectoire circulaire, en fonction de $\ell, m$ et $r_0$.

7. Expliquer comment se comporte la masse ponctuelle $m$ si l'on part de $r = r_0 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll r_0$. Montrer que l'on peut considérer les petits mouvements radiaux autour de $r_0$ comme ceux d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_r = \sqrt{\frac{U''(r_0)}{m}}$.

8. Démontrer que $\omega_r = \omega_a$. En déduire que les trajectoires sont périodiques.

9. On reprend l'expression de l'énergie $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r)$ obtenue à la question 5 et l'on pose $u = \frac{1}{r}$.

a) Montrez que la conservation de l'énergie se traduit par :

$$\mathcal{E} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - 2u_0 u$$

où l'on a défini : $\mathcal{E} = \frac{2mE}{\ell^2}$ et $u_0 = \frac{GMm^2}{\ell^2}$. Quelles sont les dimensions de $\mathcal{E}$ et de $u_0$ ? Quel est le lien entre $u_0$ et $r_0$ ?

b) Montrer que la dynamique de $u(\theta)$ est identique à celle d'un oscillateur harmonique centré en $u_0$ (Indication: interpréter $u$ comme une amplitude et $\theta$ comme un temps).

c) Donner l'expression de la fonction $u(\theta)$ (on prendra $u(0) = u_0(1+e)$ et $\frac{du}{d\theta}(0) = 0$).

d) En déduire que l'on a

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos\theta}\,, \tag{1}$$

où l'on exprimera $r_0$ et $e$ en fonction de $u_0$ et de $\mathcal{E}$, puis en fonction de $E, L, G, M$ et $m$.

e) Expliquer pourquoi cette formule décrit une conique (indication: on pourra exprimer cette équation en coordonnées cartésiennes). Que représente $e$? On ne s'intéressera dans la suite qu'au cas $e < 1$.

**Partie II : Effet de la forme de la Terre sur le potentiel gravitationnel**

La Terre n'est pas une sphère parfaite ; elle ressemble plutôt par un ellipsoïde de révolution autour de l'axe polaire Nord-Sud, très légèrement aplati aux pôles. Nous noterons $\mathcal{A}$ cet applatissement :

$$\mathcal{A} = \frac{R_e - R_p}{R_e} \ll 1$$

où $R_e$ est le rayon équatorial et $R_p$ le rayon polaire.

10. Nous allons donner une estimation approximative du coefficient $\mathcal{A}$ en faisant le raisonnement suivant.

a. On considère que la Terre est un solide suffisamment mou pour être déformable. Chaque point de masse $m$ à la surface de la Terre est soumis à deux forces : la gravitation, inversement proportionnelle au carré de sa distance $R$ au centre de la Terre, et la force centrifuge donnée par $-m\omega_T^2 r_z$ où $r_z$ est la distance à l'axe polaire et $\omega_T$ la vitesse de rotation angulaire de la Terre. Montrer que l'effet conjugué de ces forces dérive du potentiel suivant (pour une masse unité $m$)

$$V_{\text{pesanteur}} = -\frac{GM_T}{R} - \frac{1}{2}\omega_T^2 r_z^2$$

b. Donner un argument pour justifier pourquoi la surface de la Terre doit être une équipotentielle du potentiel $V_{\text{pesanteur}}$. En comparant les situations au pôle Nord ($R = R_p$) et à l'équateur ($R = R_e$), en déduire une prédiction pour la valeur de $\mathcal{A}$ en fonction de $\omega_T, R_T$ et $g \simeq 9.8\, ms^{-2}$, l'accéleration de la pesanteur. (On utilisera le fait que $R_e$ et $R_p$ diffèrent relativement peu du rayon moyen $R_T$ de la Terre).

c. Faire l'application numérique pour estimer la valeur de $\mathcal{A}$.

d. Une formule plus exacte pour $\mathcal{A}$ est donnée par

$$\mathcal{A} \simeq \frac{5\omega_T^2 R_T}{4g}$$

Estimer numériquement cette valeur.

e. Quelles sont les sources d'erreurs possibles dans le raisonnement fait en 6 b. ci-dessus qui pourraient expliquer la différence avec 6 d. ?

11. On considère que la Terre est homogène de densité constante $\rho$ ; sa forme est représentée par l'équation de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2 + y^2}{R_e^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1\,.$$

a. Montrer que le potentiel gravitationnel créé par la Terre en un point (immobile) $P = (r, 0, 0)$ très éloigné de son centre $O$ et situé dans le plan $xOy$ peut s'écrire sour la forme

$$V_1(r) = -G\rho \int\int\int_{\text{Terre}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} = -G\left(\frac{M_T}{r} + \frac{\rho Q}{2r^3}\right)$$

Pour obtenir $Q$, on effecturera un développement limité à l'ordre trois en $x/r, y/r, z/r \ll 1$ et on montrera l'identité suivante

$$Q = \int\int\int_{\text{Terre}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(2x^2 - y^2 - z^2\right) = \frac{1}{2}\int\int\int_{\text{Terre}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$$

c. On donne la valeur de $\rho Q$ :

$$\rho Q = \frac{M_T}{5}\left(R_e^2 - R_p^2\right)$$

En déduire que le potentiel de gravitation $V_1(r)$ créé par la Terre en $P$ vaut approximativement

$$V_1(r) \simeq -\frac{GM_T}{r}\left(1+\frac{\alpha R_T^2}{r^2}\right)$$

où $\alpha$, que l'on déterminera, ne dépend que de l'aplatisssement $\mathcal{A}$. Estimer la valeur de $\alpha$.

d. Que devient le résultat précédent si l'on prend $P$ dans le plan $xOy$ de coordonnées $P=(x,y,0)$ avec $x^2+y^2=r^2$ ?

e. En déduire comment est modifiée l'énergie $\mathcal{E}$ que l'on avait obtenue à la question 9. a. de la première partie. Que devient l'équation étudiée 9. b. qui régit la dynamique de $u$ ? Quelle difficulté nouvelle présente cette équation (que l'on ne cherchera pas à résoudre) ?

**Partie III : Modification du potentiel gravitationnel en Relativité Générale. Précession du périhélie de Mercure**

En Relativité Générale (Einstein, 1915), la gravitation résulte de la courbure de l'espace-temps et la loi de Newton apparaît comme une limite non-relativiste de cette théorie. A l'ordre le plus bas, le champ gravitationnel relativiste créé par un astre de masse $M$ sur une masse $m$ est donné par :

$$V_{RG}(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{GM\ell^2}{m^2c^2r^3}$$

Cela conduit au potentiel effectif suivant :

$$U_{RG}(r) = \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{GM\ell^2}{mc^2r^3}$$

*Vérifier que les deux derniers termes sont bien homogènes.*

12. Tracer l'allure du potentiel $U_{RG}(r)$ et montrer que son minimum est atteint en $r_1$ qui vérifie

$$\ell^2 = m^2c^2\frac{\mathcal{M}{r_1}^2}{r_1-3\mathcal{M}}$$

où l'on a défini

$$\mathcal{M} = \frac{GM}{c^2}$$

Quelle est la dimension de $\mathcal{M}$ ? Estimer sa valeur en prenant pour $M$ la masse du Soleil.
*Indication : Il est plus commode de travailler avec la variable $u=1/r$.*

13. En déduire que la vitesse angulaire de la trajectoire circulaire de rayon $r_1$, notée $\Omega_a$, est donnée par

$$\Omega_a^2 = \frac{\ell^2}{m^2r^4} = c^2\frac{\mathcal{M}}{{r_1}^2(r_1-3\mathcal{M})} \qquad (2)$$

14. Montrer que la pulsation radiale, définie par $\Omega_r := \sqrt{\frac{U''_{RG}(r_1)}{m}}$, satisfait

$$\Omega_r^2 = c^2 \frac{\mathcal{M}(r_1 - 6\mathcal{M})}{{r_1}^3(r_1 - 3\mathcal{M})} \tag{3}$$

15. De l'approximation $\Omega_a^2 - \Omega_r^2 \simeq 2\,\Omega_a(\Omega_a - \Omega_r)$, conclure que $\Omega_a - \Omega_r \simeq \frac{3\mathcal{M}}{r_1}\,\Omega_a$. Estimer la différence relative $(\Omega_a - \Omega_r)/\Omega_a$ dans le cas de Mercure qui tourne autour du soleil à une distance d'environ $r_1 = 5,8 \times 10^{10}$ m.

16. Expliquer pourquoi le fait que $\Omega_a \neq \Omega_r$ implique que la trajectoire de $m$ autour de l'astre $M$ n'est pas une courbe fermée mais qu'elle précesse lentement (quand $\mathcal{M}/r_1 \ll 1$). On se reportera à la figure 1 qui illustre la notion de précession.

17. Mercure fait le tour du Soleil en 88 jours avec $r_1 = 5,8 \times 10^{10}$ m. Démontrer que son périhélie tourne de $0,012°$ en 100 ans, c'est-à-dire environ 43 secondes d'arc par siècle, du fait de la Relativité Générale.

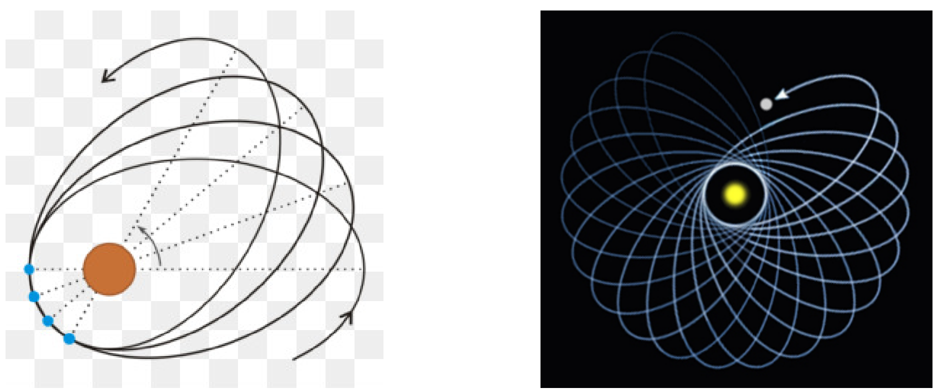

**Figure 1.** La précession du périhélie d'une planète comme Mercure traduit le fait que sa trajectoire autour du soleil n'est pas une ellipse fixe. Au cours des révolutions successives l'axe de cette ellipse tourne lentement. Plus précisément, la direction de la droite passant par le Soleil et Mercure au moment où ils sont le plus proches (c'est la définition du terme *périhélie*) n'est pas fixe, mais varie lentement (source des figures : wikipedia et www.astrosurf.com).