Épreuves orales de Mathématiques 1 et 2, Filière MP

Les paragraphes suivants rassemblent les impressions qu'ont laissées aux examinateurs de mathématiques les oraux de l'édition 2024 du concours.

Les examinateurs espèrent que les candidats malheureux de cette année trouveront dans ce rapport un début d'explication pour leur échec et que sa lecture permettra aux candidats du concours de 2025 d'aborder les oraux dans de bonnes conditions.

Donnons d'abord quelques statistiques.

Épreuves orales de Mathématiques 1 : La moyenne des notes des 382 candidats est de 11,80/20 avec un écart-type de 2,88.

Épreuves orales de Mathématiques 2 : La moyenne des notes des 382 candidats est de 11,55/20 avec un écart-type de 2,88.

Les nouveaux programmes sont appliqués lors des oraux du concours. Il est important de rappeler que l'épreuve orale porte sur l'ensemble du programme, y compris la théorie des probabilités, la géométrie ou le calcul différentiel. Bien évidemment les exercices sont minutieusement conçus pour que seuls les théorèmes du programme suffisent à leur résolution.

L'oral de mathématiques doit permettre à l'examinateur d'évaluer la compréhension qu'a le candidat des concepts et méthodes fondamentaux du programme de mathématiques.

Pendant l'interrogation, l'autonomie du candidat est particulièrement importante. L'examinateur apprécie la capacité de ce dernier à aller de l'avant, ainsi que son aptitude à imaginer des stratégies et à faire preuve d'agilité technique. Les candidats doivent prendre l'initiative, proposer un plan d'attaque ou, si le problème semble difficile, tester l'énoncé sur des cas particuliers et éventuellement dessiner des figures pour donner forme à son intuition, ce qui peut s'avérer utile même hors du cas évident d'un problème de géométrie. Face à un exercice difficile, le candidat est censé réagir de façon cohérente et intelligente en s'inspirant des situations plus communes qu'il a déjà rencontrées, ou de cas particuliers intéressants plus accessibles. L'examinateur peut alors choisir de le laisser développer une stratégie de résolution (si tant est qu'elle soit bien mise en œuvre, quand bien même celle-là ne fût pas la plus efficace), ou au contraire l'aiguiller vers des arguments plus adaptés, dont le développement peut se révéler plus gratifiant.

Un candidat doit donner des réponses claires et directes aux questions posées. Une bonne formulation doit conjuguer clarté, concision et précision. Le candidat doit structurer sa réflexion et formuler avec précision des arguments complets. Il vaut mieux, avant de s'exprimer, faire une courte pause pour rassembler ses idées. Par ailleurs, il faut prendre le temps de la réflexion et ne pas se lancer dans des calculs sans objet.

Mentionnons encore une tendance récente qui nuit au déroulement de la pensée mathématique et à la discussion avec l'examinateur : certains candidats rechignent à écrire des propriétés mathématiques précises au tableau, et parfois même se contentent d'un bavardage en guise de démonstration. Une variante de ce phénomène est la réticence à calculer. Il est tout à l'honneur d'un candidat de réfléchir si un argument abstrait permet de court-circuiter un calcul, mais on s'attend aussi à ce que le candidat sache juger de la pertinence de cette réflexion.

Lorsque l'examinateur dicte l'énoncé de l'exercice, le candidat ne doit pas essayer de le reformuler ou d'utiliser abusivement des abréviations : ceci mène le plus souvent le candidat à écrire une question qui n'est pas celle qui lui a été posée. Le candidat doit écrire au tableau l'énoncé dans les termes exacts dictés par l'examinateur. Ceux-ci ont toujours été choisis par les examinateurs avec soin et précision.

Si les fautes d'orthographe et de grammaire lors de la dictée du ou des exercices ne sont pas prises en compte dans l'évaluation des candidats, elles devraient néanmoins être évitées.

Il arrive aussi que l'examinateur demande qu'un argument soit clarifié, sans pour autant que la stratégie du candidat soit remise en cause : certains candidats surréagissent à ces observations alors que l'examinateur ne voulait qu'infléchir le cours de leur réflexion.

Venons-en enfin aux mathématiques elles-mêmes. Nous avons constaté les manques suivants chez de nombreux candidats :

- *Cours* Le jury a été surpris que la manipulation de valeurs absolues pose problème à un grand nombre de candidats. Les examinateurs ont noté des manquements sur des points fondamentaux du cours chez certains candidats : relations d'Euler, orthogonal d'une somme d'espaces vectoriels, la convergence uniforme, le théorème des accroissements finis, distinction entre élément minimal et borne inférieure ... Toute partie du programme peut faire l'objet d'un exercice, notamment le programme de première année.
- *Dessins* La réticence des candidats à faire le moindre dessin est préoccupante, que ce soit pour guider un raisonnement sur une marche aléatoire, ou autre.
- *Savoir-faire* La manipulation des matrices par blocs élémentaires doit être connue sans hésitation. Les examinateurs attendent que les candidats soient capables de calculer et de trouver un équivalent de $arctan(x) - \pi/2$ en $+\infty$... On attend aussi que les candidats puissent, avec des indications, mettre en oeuvre une extraction diagonale pour des suites...
- *Abréviations.* Des candidats utilisent des abréviations au tableau, qui conduisent parfois à des confusions. Par exemple est-ce que v.p. signifie valeur propre ou vecteur propre ?
- *Problèmes de logique.* Il est fâcheux de rencontrer des candidats ne sachant pas exprimer la négation d'une proposition mathématique. Par exemple, le fait qu'une fonction ne tend pas vers 0 à l'infini, ne signifie pas qu'elle admet une limite non-nulle à l'infini. Plusieurs candidats utilisent encore l'ancienne terminologie « analyse/synthèse » et s'y rattachent comme à une bouée de sauvetage, sans pour autant que cela les aide à résoudre le problème posé. Ils prononcent ces mots comme s'ils avaient eu une idée et ceci ne manque pas de laisser les examinateurs perplexes... L'usage de cette terminologie induit d'ailleurs parfois les candidats à commettre des erreurs de logique élémentaire.
- Le jury a remarqué que de nombreux candidats avaient du mal à effectuer au tableau des calculs de plusieurs lignes sans erreur. On aimerait que les candidats fassent appel à leur intuition pour détecter d'éventuelles erreurs de calculs. Bien que l'on ne s'attende pas à ce que les candidats soient des virtuoses du calcul, on aimerait qu'ils montrent une certaine familiarité avec des opérations élémentaires et sachent par exemple sans erreur

— savoir tracer le graphe de fonctions comme $x \mapsto 1 + x + x^4$ ou $t \mapsto \sin(1/t)$,

— montrer que la trace d'une matrice nilpotente est nulle, mais que la réciproque est fausse ;

— montrer la continuité d'une application de la forme $X \to \|MX\|$ pour M une matrice et $\|.\|$ une norme ;

— déterminer la composée de deux symétries orthogonales du plan ou la composée de deux rotations de centres distincts.

- L'utilisation des nombres complexes dans des problèmes de géométrie cause chez certains candidats des difficultés surprenantes. Ce qui ne veut pas dire qu'il faut absolument les utiliser pour tout problème de géométrie plane : on s'attendrait par exemple, sans que cela soit le cas, à ce que les candidats soient capables de dessiner une réunion finie de cercles $C(r, 1-r)$ (pour $0 < r < 1$) sans passer par « $z = a + ib$ » ou « $z = \rho e^{i\theta}$ ».

On trouve cependant de très bons candidats échappant à toutes ces critiques. Certains montrent même un enthousiasme rafraîchissant pour ce beau domaine qu'est la mathématique et inter-agissent de manière constructive avec les examinateurs. Nous espérons que ces quelques conseils (auxquels pourront s'ajouter ceux contenus dans les rapports des années précédentes) permettront d'en augmenter le nombre.

Pour conclure, nous proposons ci-dessous un exemple d'exercice posé lors de la session 2024, accompagné d'éléments de correction et de commentaires.

Énoncé

Considérons $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 2$, muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs de rang $r \geqslant 1$. Existe-t-il un projecteur $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et une base orthonormée $(f_1, \cdots, f_n)$ tels que $p(f_i) = v_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$?

1) Traiter le cas $r = n$.

2) Supposons $n = 2$ et $r = 1$ et plaçons-nous dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'il y a des solutions si et seulement si $\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \geqslant 1$.

3) Formuler le problème matriciellement à l'aide de la matrice V dont les colonnes sont $v_1, \cdots, v_n$. Généraliser le résultat du 2) en montrant que si $r = 1$, il y a une solution si et seulement si $\|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 \geqslant 1$.

4) Dans le cas général, trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de V^tV pour que le problème ait une solution (on note ${}^tV$ la transposée de V).

Commentaires

La question 1 est simple et l'examinateur s'attend à une réponse rapide du candidat. La question 2, indépendante des autres, vise avant tout à faire un peu de géométrie. Le problème s'analyse naturellement avec un point de vue matriciel. C'est l'objet des questions 3 et 4. Un traitement efficace des questions 1), 2) et 3) suffit amplement à assurer une note très satisfaisante.

1) Rappelons que si $x \in Im(p)$, alors $p(x) = x$. Si $r = n$, alors $Im(p) = \mathbb{R}^n$ et p est nécessairement égal à l'identité. Une condition nécessaire et suffisante et donc que les (v_i) soient une base orthonormée.

2) On se place dans $\mathbb{C}$. On attend en premier lieu du candidat qu'il dessine une configuration un peu générale qui illustre la situation. Ca n'a pas toujours été facile à obtenir. Un projecteur de rang un est ici donné par deux droites vectorielles distinctes, une sur laquelle on projette, $Im(p)$, et une autre qui donne la direction de projection, $Ker(p)$. La donnée de ces deux droites détermine entièrement p.

Comme $r = 1$, v_1 et v_2 sont alignés, non tous les deux nuls. A rotation près, on peut supposer v_1 et v_2 réels. En utilisant les nombres complexes, écrivons $f_1 = e^{i\theta}$ et $f_2 = \varepsilon i e^{i\theta}$. On cherche $\varepsilon = \pm 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ et le projecteur p. S'il y a une solution, alors $Im(p) = \mathbb{R}$ et les vecteurs $e^{i\theta} - v_1$ et $\varepsilon i e^{i\theta} - v_2$ sont colinéaires, de direction commune $Ker(p)$. A l'inverse, si ces deux vecteurs sont colinéaires, l'un des deux étant toujours non réel, on obtient la direction de $Ker(p)$ et ce sev est bien différent de $\mathbb{R}$.

Si $|v_1| = 1$, on peut trouver θ tel que $v_1 = e^{i\theta}$ et la réponse est oui. Sinon, la condition à examiner est $(i\varepsilon e^{i\theta} - v_2)/(e^{i\theta} - v_1) \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\frac{i\varepsilon e^{i\theta} - v_2}{e^{i\theta} - v_1} = \frac{i\varepsilon - v_2 e^{-i\theta} - i\varepsilon e^{i\theta} v_1 + v_1 v_2}{|e^{i\theta} - v_1|^2}$$

et il s'agit d'annuler la partie imaginaire du numérateur, soit $\varepsilon + v_2 \sin\theta - \varepsilon v_1 \cos\theta = 0$. Définissons γ en fonction de ε par $\cos\gamma = \varepsilon v_1/\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ et $\sin\gamma = v_2/\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. On arrive à :

$$\cos(\theta + \gamma) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

qui a des solutions θ si et seulement si $v_1^2 + v_2^2 \geqslant 1$.

3) Introduisons la matrice $V = (v_1|\cdots|v_n)$. On cherche p par sa matrice P dans la base canonique. Le problème général est donc de trouver P telle que $P^2 = P$ et U orthogonale vérifiant $V = PU$. En remplaçant U par son inverse, c'est-à-dire en écrivant $P = VU$, on cherche donc U orthogonale telle que $VUVU = VU$, ou encore :

$$VUV = V.$$

Ici V est de rang 1, donc s'écrit $V = a^t b$, avec des vecteurs a et b non nuls. On peut supposer que $\|a\| = 1$. Alors $\|v_1\| = |b_1|, \cdots, \|v_n\| = |b_n|$. L'équation s'écrit :

$$a^t bUa^t b = a^t b, \text{ soit } \langle b, Ua\rangle a^t b = a^t b \text{ ou } \langle b, Ua\rangle V = V.$$

Il faut donc trouver U orthogonale telle que $\langle b, Ua\rangle = 1$. Comme $\|Ua\| = \|a\| = 1$, il est facile de voir par continuité que la quantité $\langle b, Ua\rangle$ décrit l'intervalle $[-\|b\|, \|b\|]$, quand U parcourt $O_n(\mathbb{R})$, point qui repose sur le fait que la sphère unité est connexe en dimension $n \geqslant 2$ et que l'examinateur demande en général au candidat de détailler. Il y a donc une solution si et seulement si $\|b\| \geqslant 1$, ce qui est le résultat voulu.

4) Dans le cas général, on cherche à quelle condition portant sur les valeurs propres de $V^t V$ il existe U orthogonale telle que $VUV = V$. L'examinateur suggère alors de s'appuyer sur l'existence d'une décomposition polaire $V = SR$ de V, avec S symétrique réelle positive (de rang r) et R orthogonale. Ce point, admis dans un premier temps, peut faire l'objet d'une discussion en fin d'oral.

D'après le théorème de réduction des matrices symétriques réelles, on peut écrire $S = TD^t T$, avec T orthogonale et D diagonale, notée $D = diag(d_1, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$, où $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_r > 0$. Les d_i sont les racines carrées des valeurs propres de $V^t V$. On arrive ainsi à :

$$(TD^t TR)U(TD^t TR) = TD^t TR, \text{ soit } D({}^t TRUT)D = D.$$

L'application $U \longmapsto {}^t TRUT$ est bijective de $O_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. On reformule donc le problème en : trouver $U = (u_{ij})$ orthogonale telle que

$$DUD = D.$$

Cela donne donc $u_{ij} = 0$ si $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$ et $u_{ii} = 1/d_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Pour assurer que U est orthogonale, il est nécessaire et suffisant que les r premiers vecteurs colonne de U, notés $u_1 = (u_{i1})_{1\leqslant i\leqslant n}, \cdots, u_r = (u_{ir})_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment une famille orthonormée. Elle peut ensuite être complétée arbitrairement en une BON avec des $u_{r+1}, \cdots, u_n$.

Il est tout d'abord nécessaire que $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_r \geqslant 1$. Si $d_1 = \cdots = d_r = 1$, on doit prendre $u_i = e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Sinon, soit $1 \leqslant q \leqslant r$ tel que $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_q > 1 = d_{q+1} = \cdots = d_r$. Nécessairement, on a de nouveau $u_i = e_i$ pour $q+1 \leqslant i \leqslant r$. Il est ensuite nécessaire et suffisant pour compléter la détermination de $u_1, \cdots, u_q$ que les q vecteurs $\{(u_{i1})_{r+1\leqslant i\leqslant n}, \cdots (u_{iq})_{r+1\leqslant i\leqslant n}\}$ de $\mathbb{R}^{n-r}$ soient orthogonaux et de normes respectives $(1-d_1^{-2})^{1/2} > 0, \cdots, (1-d_q^{-2})^{1/2} > 0$. On peut en trouver si et seulement si $q \leqslant n - r$, ce qui conclut la discussion.

Notons que si $r = 1$, cette dernière condition est vraie car $n \geqslant 2$. En reprenant les notations du 3), on a dans ce cas $V^t V = \|b\|^2 a^t a$, diagonalisable, de valeurs propres 0 et $\|b\|^2$ (et de sous-espaces propres respectifs $a^\perp$ et $\mathbb{R}a$), donc $d_1 = \|b\|$. On retrouve bien le résultat du 3).