

Épreuves orales de Mathématiques, Filière PC

L'objectif de ce rapport est de permettre aux candidats du concours de 2025 d'aborder les oraux dans de bonnes conditions.

Il reprend des indications générales sur le déroulement d'un oral, donne des conseils sur le comportement à adopter au cours de l'épreuve, puis met en évidence des lacunes constatées cette année (et malheureusement parfois récurrentes) sur certains points du programme.

Le programme est celui en vigueur depuis la session 2021. Il est important de rappeler que l'épreuve orale porte sur son ensemble, y compris la théorie des probabilités. Bien évidemment les exercices sont conçus pour que seuls les résultats figurant au programme soient nécessaires à leur résolution.

Commençons par la moyenne et l'écart-type, des candidats français et internationaux :

500 candidats pour une moyenne de 11,51/20 avec un écart-type de 3,02

L'oral de mathématiques a pour but d'évaluer la compréhension qu'a le candidat des concepts et méthodes fondamentaux du programme de mathématiques.

L'autonomie du candidat est un point d'appréciation particulièrement important. La capacité à avancer, l'aptitude à imaginer des stratégies, l'agilité technique sont des éléments de l'évaluation.

Le candidat ne doit pas s'attendre à un oral "linéaire" guidé par l'examineur. **Il doit prendre l'initiative**, tester des cas plus simples lorsque c'est possible, si le problème lui semble difficile, et ne pas hésiter à s'appuyer sur des figures notamment pour la géométrie. Il est rappelé qu'il ne sert souvent à rien de foncer "tête baissée" dans un exercice et que remplir un tableau ne garantit en rien de réussir.

Les premières minutes de l'évaluation sont dédiées à la réflexion et l'examineur laisse volontairement la main au candidat, qui ne doit donc pas s'inquiéter si l'examineur reste silencieux : le dialogue doit être engagé par le candidat, l'examineur n'étant pas là pour débloquer de suite un exercice difficile. En revanche, en cas d'incompréhension autour d'un terme de l'énoncé, il ne faut pas hésiter à demander des précisions à l'examineur : si un terme utilisé par l'examineur n'est pas connu du candidat, ce dernier doit lui demander de le définir, même s'il s'avère que ce terme est au programme. Le candidat ne doit pas hésiter à examiner des exemples ou des cas particuliers afin de s'appropriier l'énoncé, et de prendre quelques instants de réflexion pour deviner si une implication est plus facile qu'une autre lorsque l'énoncé demande de démontrer une équivalence.

Lancer au hasard des mots-clefs ou des propositions plus ou moins précises et guetter l'attitude de l'examineur ne saurait être une stratégie de succès. Un candidat doit donner des **réponses claires et directes** aux questions posées. Une bonne formulation doit conjuguer clarté, concision et précision : il peut être parfois utile de commencer par écrire puis expliquer à l'examineur plutôt que parler sans arriver à formuler correctement... D'une manière générale, certaines explications qui seraient trop longues à formuler par écrit peuvent être données oralement, mais inversement, écrire une preuve claire au tableau est parfois préférable à des explications orales peu claires.

Le candidat doit **structurer sa réflexion et formuler avec précision des arguments complets** ; il peut faire une courte pause pour rassembler ses idées. Au tout début de l'interrogation notamment, l'examineur est occupé par des tâches administratives (vérifier l'identité du candidat, recopier son nom ainsi que l'énoncé...) et ces quelques minutes doivent être mises à profit par le candidat pour trouver son calme, se concentrer et réfléchir seul au problème. Les interventions des candidats désireux de dire quelque chose quelques secondes après que l'énoncé est posé sont rarement pertinentes et amènent parfois à de graves erreurs de raisonnement.

Par ailleurs, il faut **prendre le temps de la réflexion**. Se lancer dans des calculs sans objet est contre-productif. On s'attend à ce que le candidat s'interroge sur la pertinence de ses calculs et explique ce qu'il a l'intention de faire avant de les commencer, et ce notamment afin de repérer d'éventuelles erreurs qui en seront d'autant plus faciles à rectifier.

*

Rappelons que pendant l'unique oral de mathématiques en filière PC, les examinateurs sont souvent amenés à poser des exercices comportant plusieurs questions, ou plusieurs exercices indépendants, afin de se faire une idée la plus précise du niveau global du candidat. Par conséquent, passer l'intégralité du temps d'interrogation à résoudre un exercice très simple, même sans erreur, ne pourra en aucun cas assurer une bonne note au candidat. À l'inverse, si un candidat répond rapidement à plusieurs questions et se retrouve par la suite bloqué devant un exercice plus difficile, cela ne signifie pas que sa note s'en trouvera très pénalisée.

Lorsque l'examineur dicte l'énoncé de l'exercice, le candidat ne doit pas essayer de le reformuler ou d'utiliser abusivement des abréviations : ceci mène le plus souvent le candidat à écrire une question qui n'est pas celle qui lui a été posée. **Le candidat doit écrire au tableau l'énoncé dans les termes exacts dictés par l'examineur.** Ceux-ci ont toujours été choisis par les examinateurs avec soin et précision.

Idéalement, l'examineur ne fait que réagir aux initiatives du candidat. Il pourra par exemple décider de le décourager de se lancer dans des calculs inutilement compliqués, ou l'aider à constater qu'il a fait une erreur. Les questions de l'examineur ne doivent pas être prises à la légère, et un simple oui ou non proposé au hasard pour s'en débarrasser ne saurait satisfaire l'examineur, qui a toujours une raison précise pour poser ces questions. En particulier, si une autre voie que celle empruntée par le candidat est proposée, ce dernier devrait sans doute essayer de comprendre la suggestion de l'examineur, qui ne prend la parole que pour l'aider.

L'examineur peut demander de détailler ou de clarifier un argument : ceci ne signifie pas nécessairement que la stratégie du candidat est remise en cause ; certains candidats surréagissent à ces observations alors que l'examineur ne voulait qu'infléchir le cours de leur réflexion.

Enfin, s'il arrive que l'examineur indique la solution d'un problème en fin d'oral ou corrige lui-même une erreur, il est ennuyeux de voir le candidat reprendre ses propos pour donner l'illusion qu'il est lui-même parvenu à cette solution. Les candidats ne doivent pas non plus être surpris si la planche s'arrête au milieu d'un exercice ou si l'examineur ne donne pas la solution à l'exercice. **Il est par ailleurs inutile de demander un autre exercice sous prétexte de ne pas réussir le premier.**

Venons-en enfin au contenu mathématique lui-même. De nombreux candidats ont rencontré les difficultés suivantes :

- *Lacunnes sur certaines parties du programme.* Toute partie du programme peut faire l'objet d'un exercice, notamment le programme de première année, par exemple le théorème de Rolle, le théorème de accroissements finis, le théorème des bornes atteintes... Il est préférable de formuler correctement l'inégalité de Taylor-Lagrange plutôt que d'écrire un développement de Taylor avec reste intégral erroné (ce dernier n'étant d'ailleurs pas exigible).
- *Importance des hypothèses.* Même si certaines hypothèses sont parfois faites pour simplifier les énoncés, on s'attend à ce que le candidat qui ne les utiliserait pas s'interroge sur la validité de sa méthode. Souvent, les hypothèses faites sont essentielles.
- *Précipitation.* Se lancer à l'aveugle dans des calculs sans prendre le temps de la réflexion est contre-productif. Par exemple, lorsqu'il s'agit de montrer qu'une fonction est croissante, on ne doit pas systématiquement chercher à calculer sa dérivée, une démarche qui peut ne pas avoir de sens. De même, avant de considérer une intégrale, le candidat devra vérifier qu'elle est bien définie ; notamment une intégrale n'a pas nécessairement ses singularités aux bords, et inversement les bornes d'une intégrale ne sont pas nécessairement des singularités.
- *Abréviations.* Des candidats utilisent des abréviations au tableau, qui conduisent parfois à des confusions. Par exemple est-ce que v.p. signifie valeur propre ou vecteur propre ? La rédaction doit être soignée un minimum. Eviter d'utiliser des symboles mathématiques comme abréviations de mots en français.
- *Problèmes de logique.* Il est fâcheux de rencontrer des candidats ne sachant pas exprimer la négation d'une proposition mathématique. Par exemple, la négation de « (u_n) converge » n'est pas « (u_n) tend vers l'infini », et la négation de « (u_n) tend vers 0 » n'est pas « (u_n) tend vers une limite non nulle ».
- *Manque de réflexes sur les exercices d'algèbre linéaire.* Il est souvent utile dans ce type d'exercices de s'intéresser aux vecteurs propres et aux valeurs propres, ou de chercher à diagonaliser ou trigonaliser les matrices, plutôt que de se lancer tête baissée dans des calculs. Les exercices d'algèbre linéaire se résolvent rarement en effectuant des calculs matriciels bruts, les candidats manquent souvent de réflexion conceptuelle.
- *Manque de rigueur dans les calculs.* Ne pas oublier de vérifier qu'un terme est non nul avant d'effectuer une division, de vérifier le signe des termes de deux inégalités avant de les multiplier ensemble, citer l'inégalité triangulaire avec exactitude...
- Ne pas passer à la limite une inégalité avant de savoir si les limites existent.
- Les fonctions positives intégrables sur \mathbb{R} ne tendent pas nécessairement vers 0 à l'infini.
- Pour aborder les problèmes de géométrie, il est souvent utile de faire des dessins plutôt que de raisonner à l'aveugle.

On conclura en remarquant que même des candidats à fort potentiel n'échappent pas à ces critiques et que les très bons candidats se font plus rares en dépit d'un enthousiasme certain pour les mathématiques. Nous espérons que ces quelques conseils (auxquels pourront s'ajouter ceux contenus dans les rapports des années précédentes) permettront d'en augmenter le nombre.

Exemples d'exercices posés :

Exercice 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer qu'il existe une et une seule décomposition $A=B-C$ avec B et C positives et $BC=CB=0$.

Exercice 2 : Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0)=f(2\pi)$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt = 0$. Quel est le nombre minimum de points d'annulation de f ?

Pour l'exercice 1, au moins l'existence de la décomposition ne devrait pas poser de difficulté aux candidats qui ont le réflexe d'appliquer le théorème spectral.

L'exercice 2 est assez difficile. Néanmoins les candidats peuvent, pour commencer, traiter rapidement le cas $n=0$ puis essayer de conjecturer le résultat dans le cas général.