

## **2.1**

### **Travail demandé :**

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

### **Remarques générales :**

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs. . .) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

### **Remarques particulières :**

# QUELQUES NOTIONS SUR LES ORDINAUX

**Résumé :** Après avoir défini ce qu'est un bon ordre, on envisage tous les bons ordres de l'ensemble des naturels. On définit ainsi des ordinaux transfinis dont le plus petit, oméga, correspond à l'ordre habituel sur  $\mathbf{N}$ . On définit ensuite des opérations entre ordinaux (addition, multiplication, exponentiation) dont on donne quelques propriétés. L'existence d'une relation d'ordre entre ordinaux permet d'aborder la notion de récurrence transfinie. Enfin on laisse entendre qu'il existe des ordinaux plus grands que tous ceux que l'on peut définir à partir des naturels.

**Mots-clés :** Infini, ordinal, ordre, bon ordre.

On distingue habituellement dans la langue naturelle les nombres cardinaux comme 1, 2, 3, ... des nombres ordinaux qui sont 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, ... Dans ce dernier cas on parle parfois de « numéro ». Selon les langues, ces deux notions sont plus ou moins distinguées. L'anglais ignore cette distinction, l'allemand ou le russe distinguent nettement tandis que le français hésite puisque si on parle de Louis I<sup>er</sup> ou du 1<sup>er</sup> avril, on parle ensuite de Louis XV ou du 12 avril, *etc.* Comme leur nom l'indique, les ordinaux font référence à l'ordre alors que les cardinaux ne se réfèrent qu'à la quantité. On distingue donc les deux 30 des phrases suivantes :

*Le mois d'avril a 30 jours ;* notion de cardinal.

*C'était le 30 avril ;* notion d'ordinal (on sous-entend que c'est le lendemain du 29, lui-même lendemain du 28, ...).

## 1. Rappels

On dit qu'une relation (notée par exemple  $\triangleleft$ ) dans un ensemble  $E$  est une *relation d'ordre* si elle possède les trois propriétés suivantes :

- elle est réflexive :  $\forall x \in E, x \triangleleft x$  ;
- elle est transitive :  $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft z) \implies x \triangleleft z$  ;
- elle est antisymétrique :  $\forall (x, y) \in E^2, (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft x) \implies x = y$ .

On caractérise certains ordres grâce à des propriétés supplémentaires.

- On dit que l'ordre est *total* dans  $E$  si  $\forall (x, y) \in E^2, x \triangleleft y$  ou  $y \triangleleft x$ .
- On dit que l'on a affaire à un *bon ordre* dans  $E$  ou que  $E$  est *bien ordonné* si toute partie non vide possède un plus petit élément. Ceci implique en particulier que l'ordre est total.

On admet en général l'axiome du choix, équivalent à l'axiome de Zermelo qui dit que tout ensemble admet au moins une relation de bon ordre. Cependant, on ne connaît pas explicitement une telle relation de bon ordre sur  $\mathbf{R}$ .

---

### Exemples

- La relation d'ordre habituelle dans  $\mathbf{N}$ , notée  $\leq$ , est une relation d'ordre total et aussi une relation de bon ordre.
- La relation d'ordre habituelle dans  $\mathbf{Z}$ , notée  $\leq$ , est une relation d'ordre total, mais n'est pas une relation de bon ordre (la partie  $] -\infty, 2]$  ne possède pas de plus petit élément).
- La relation de divisibilité dans  $\mathbf{N}^*$ , notée  $|$ , est une relation d'ordre qui n'est pas total (on dit alors partiel).
- La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties d'un ensemble donné, notée  $\subset$ , est une relation d'ordre partiel.

## 2. Quelques bons ordres sur $\mathbf{N}$

Il est possible de fabriquer une grande quantité de relations d'ordre sur un ensemble donné. Ainsi les 26 lettres de l'alphabet français sont classées habituellement suivant l'ordre alphabétique  $(a, b, c, \dots)$  mais suivant l'ordre  $(a, z, e, r, t, y, \dots)$  sur le clavier de votre ordinateur. Dans les deux cas, on peut construire une bijection avec l'ensemble  $\llbracket 1, 26 \rrbracket$  qui respecte la relation d'ordre. C'est implicitement ce qui a été fait en énonçant les lettres dans un certain... ordre! Nous avons ainsi un isomorphisme d'ordre et même de bon ordre. L'ordre alphabétique usuel est tellement connu que si l'on signale une référence se trouvant dans le paragraphe  $d$  du chapitre 8, tout le monde sait qu'elle se trouve après le paragraphe  $c$  de ce même chapitre, *etc.*

Tant qu'il s'agit d'ensemble fini on peut se ramener à une partie finie de  $\mathbf{N}$  donc à  $\llbracket 0, \dots, n-1 \rrbracket$  pour un certain naturel  $n$  (qui est le cardinal de l'ensemble fini). Mais les choses se compliquent dès que l'on passe aux ensembles infinis.  $\mathbf{N}$  lui-même peut recevoir plusieurs relations de bon ordre qui ne sont pas isomorphes entre elles. En voici quelques exemples :

1. Plaçons dans  $\mathbf{N}$  d'abord tous les nombres impairs puis tous les nombres pairs, c'est-à-dire que l'on a l'ordre  $(1, 3, 5, 7, \dots, 0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ . Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation de bon ordre. Seulement il est impossible d'établir une bijection de  $\mathbf{N}$  sur lui-même qui transforme la relation d'ordre habituelle en cette nouvelle relation. En effet dans le cas présent, il y a deux éléments, 0 et 1, qui n'ont pas de prédécesseur tandis que dans l'ordre classique seul 0 n'a pas de prédécesseur.
2. Inspiré d'un résultat de SARKOVSKI, voici un bon ordre sur  $\mathbf{N}^*$  :  
 $(1, 3, 5, \dots, 2, 6, 10, \dots, 4, 12, 20, \dots, \dots, 2^n \times 1, 2^n \times 3, 2^n \times 5, \dots, \dots)$ ,  
 où le premier paquet ne contient que les nombres impairs et les suivants ces mêmes nombres multipliés par les puissances successives de 2. On voit ici apparaître une infinité d'éléments qui n'ont pas de prédécesseur.
3. Considérons dans  $\mathbf{N}$  l'ordre  $(1, 2, 3, 4, \dots, 0)$ . Qu'il n'y ait pas isomorphisme avec la relation d'ordre habituelle résulte de la remarque faite sur l'exemple 1. Mais il n'y en a pas non plus avec ce même exemple 1 car ici il y a un élément, 0, qui n'a pas de successeur, tandis que dans les exemples 1 et 2 tous les éléments ont un successeur. Ici 0 est l'unique élément qui vient après

tous les autres. Il est assez tentant de dire que c'est l'infini plus un. Nous y reviendrons.

### 3. Les ordinaux finis

Les ordinaux finis sont tout simplement les naturels habituels. Seulement pour, d'une part bien mettre en évidence qu'un ordinal comme 5 vient après les ordinaux 0, 1, 2, 3 et 4, et d'autre part pour permettre de mieux représenter les ordinaux infinis, nous allons écrire ces ordinaux sous la forme d'une suite ordonnée. Ceci conduit à l'écriture qui rappelle (ce n'est pas un hasard) ce qui a été fait précédemment.

$$\begin{aligned} 0 &= ( ) \\ 1 &= (0) \\ 2 &= (0, 1) \\ 3 &= (0, 1, 2) \\ &\dots\dots \\ n &= (0, 1, 2, 3, \dots, n - 1) \end{aligned}$$

Les parenthèses ne sont là que comme délimiteurs. Ce qui compte, c'est l'ordre dans lequel est écrite la liste. Nous voyons ainsi que l'ordinal 2 est à la fois un élément de l'ordinal 3 (le dernier élément) et une partie de l'ordinal 3 (appelée la section commençante  $(0, 1)$ ).

Nous utilisons l'écriture à partir de l'ensemble  $\mathbf{N}$  parce que cet ensemble est bien connu avec son ordre naturel. Mais il est clair que nous aurions pu représenter 3 par  $(a, b, c)$  où par définition  $a < b < c$ , ou par tout autre ensemble de trois éléments totalement ordonné par l'écriture même de leur liste ; ainsi  $(7, 9, 100)$  convient également.

#### 3.a. Addition de deux ordinaux finis

Nous voulons retrouver l'addition habituelle, l'addition où  $2 + 3 = 5$ , mais en utilisant l'écriture ci-dessus. Il n'est pas possible de mettre seulement bout à bout les représentations  $(0, 1)$  et  $(0, 1, 2)$  car nous obtiendrions  $(0, 1, 0, 1, 2)$  qui ne contient que trois éléments distincts dont il est impossible de définir l'ordre (où serait 1 ?). Il faut donc utiliser une copie de  $(0, 1, 2)$  qui ne contient pas les éléments de  $(0, 1)$ . Le plus simple est de prendre  $(0', 1', 2')$  et d'écrire

$$2 + 3 = (0, 1) + (0, 1, 2) = (0, 1) + (0', 1', 2') = (0, 1, 0', 1', 2') .$$

L'idée est que tout nombre primé est plus grand que tout nombre non primé. Bien sûr, dans le cas présent où nous nous intéressons aux ordinaux finis, il aurait mieux valu réécrire  $(0, 1, 2)$  sous la forme  $(2, 3, 4)$  pour obtenir :

$$2 + 3 = (0, 1) + (0, 1, 2) = (0, 1) + (2, 3, 4) = (0, 1, 2, 3, 4) ,$$

et l'on reconnaît beaucoup plus facilement l'ordinal 5 comme on s'y attendait.

Mais nous verrons que dans le cas général, il faut être beaucoup plus astucieux. Une méthode assez générale, si on veut écrire la somme de plusieurs ordinaux, et non pas seulement la somme de deux ordinaux, c'est de remplacer dans chaque ordinal, ses éléments par des couples  $\langle \ , \ \rangle$  dont le premier élément indique le rang de l'ordinal dans l'addition. Ainsi :

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 3 &= (0, 1) + (0, 1, 2, 3, 4) + (0, 1, 2) \\ &= (\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle) + (\langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle) + (\langle 3, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle) \\ &= (\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle) , \end{aligned}$$

où l'on utilise l'ordre lexicographique, à savoir que

$$\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle \iff a < c \text{ ou } (a = c \text{ et } b < d) .$$

Et ce dernier résultat est identique à  $10 = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$  puisqu'il y a une bijection évidente qui respecte l'ordre entre ces deux expressions.

### 3.b. Multiplication de deux ordinaux finis

La multiplication est une addition répétée, il n'y a pas grand-chose à rajouter par rapport aux problèmes d'écriture qui ont été soulevés à propos de l'addition. Contentons-nous d'un exemple. Pour calculer  $2 \times 3$  nous plaçons 3 copies distinctes de l'ordinal 2 bout à bout, ainsi :

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= (0, 1) \times 3 = (0, 1) + (0, 1) + (0, 1) = (0, 1) + (0', 1') + (0'', 1'') \\ &= (0, 1, 0', 1', 0'', 1'') \\ &= (0, 1, 2, 3, 4, 5) \\ &= 6 \quad \text{bien entendu !} \end{aligned}$$

## 4. Opérations sur les ordinaux

Tant qu'on en reste aux éléments finis, il n'y a vraiment pas grand-chose à ajouter. C'est quand on passe à l'infini que cela commence à devenir intéressant en mettant en évidence des propriétés originales. Et c'est en passant à l'infini que la notation précédente qui était rudement lourde va se révéler très pratique.

Un ordinal infini est donné par une relation de bon ordre sur un ensemble infini. S'il existe une bijection respectant l'ordre entre deux ensembles bien ordonnés, ces deux ensembles déterminent le même ordinal.

Le plus simple des ensembles infinis est  $\mathbf{N}$ . Nous poserons donc

$$\omega = (0, 1, 2, 3, 4, \dots) ,$$

correspondant à l'ordre habituel. Cependant, il nous arrivera dans certains cas de ne pas utiliser 0 dans l'écriture, faute d'avoir une bonne raison pour le placer à tel ou tel endroit (ce que nous avons fait dans l'exemple 2 inspiré de SARKOVSKI). Il est clair que nous pouvons aussi écrire

$$\omega = (1, 2, 3, 4, 5, \dots) ,$$

puisqu'il y a une bijection évidente qui respecte le bon ordre entre  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}^*$ . Pour les autres ordinaux nous utiliserons des lettres grecques minuscules sauf s'il s'agit d'ordinaux finis connus comme  $0, 1, \dots$  auquel cas nous utiliserons l'écriture habituelle des nombres. Notons qu' $\omega$  a été choisi car c'est la dernière lettre de l'alphabet grec et qu'il note, d'une certaine façon, le « dernier entier » puisqu'il est plus grand que tous les autres !

#### 4.a. Addition des ordinaux

Comme pour les ordinaux finis, pour créer l'ordinal noté  $\alpha + \beta$  à partir des deux ordinaux,  $\alpha$  et  $\beta$  nous allons mettre bout à bout (on dit concaténer) une représentation d' $\alpha$  et une de  $\beta$  en s'arrangeant pour que ces représentations n'utilisent pas les mêmes symboles et en décidant que les symboles utilisés dans  $\beta$  viennent après ceux utilisés dans  $\alpha$ . Commençons par le cas le plus simple, le calcul du successeur d' $\omega$  :

$$\begin{aligned}\omega + 1 &= (0, 1, 2, 3, 4, \dots) + (1) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots) + (1') \\ &= (1, 2, 3, 4, 5, \dots) + (0) = (1, 2, 3, 4, 5, \dots, 0) .\end{aligned}$$

Nous avons déjà vu ce bon ordre sur  $\mathbf{N}$  au troisième exemple. Il est alors facile de continuer et d'obtenir

$$\begin{aligned}\omega + 2 &= (2, 3, 4, 5, 6, \dots, 0, 1) , \\ \omega + 3 &= (3, 4, 5, 6, 7, \dots, 0, 1, 2) .\end{aligned}$$

Cela devient un peu plus délicat avec  $\omega + \omega$  où il nous faut juxtaposer deux copies de l'ordre habituel sur  $\mathbf{N}$  ; mais nous en avons déjà vu un exemple :

$$\begin{aligned}\omega + \omega &= (1, 3, 5, 7, \dots, 0, 2, 4, 6, \dots) , \\ \text{puis} \quad \omega + \omega + 1 &= (3, 5, 7, \dots, 0, 2, 4, 6, \dots, 1) , \\ \omega + \omega + \omega &= (1, 4, 7, 10, \dots, 2, 5, 8, 11, \dots, 0, 3, 6, 9, \dots) ,\end{aligned}$$

où nous avons distingué les entiers selon leur reste dans la division par 3.

Nous avons ainsi créé une infinité d'ordinaux infinis que nous appellerons les *ordinaux transfinis*. Il y a malheureusement un gros hic en ce qui concerne leur addition. Voyons-le en calculant

$$1 + \omega = (0) + (0, 1, 2, 3, 4, \dots) = (0) + (1, 2, 3, 4, 5, \dots) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots) = \omega .$$

L'addition n'est plus commutative ! Perdre certaines propriétés quand on cherche à étendre une structure à un ensemble plus vaste est assez classique. Voyons alors les propriétés de l'addition des ordinaux.

- Pour tout ordinal  $\alpha$  ,  $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$  donc 0 est élément neutre.
- Pour tout triplet d'ordinaux  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ,  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  , ce qui traduit l'associativité.
- Si  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des ordinaux,  $\gamma + \alpha = \gamma + \beta \implies \alpha = \beta$ . On peut donc simplifier à gauche.

- Mais de  $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$  on ne peut rien conclure comme le prouve l'exemple  $1 + \omega = 0 + \omega$  alors qu'on a  $1 \neq 0$ .

Il n'est, a priori, pas possible de définir une soustraction parmi les ordinaux car certains ordinaux n'ont pas de prédécesseur. Ainsi, si  $\omega$  est parfaitement défini de même que  $\omega + 1$ , il est impossible de définir  $\omega - 1$ .

#### 4.b. Relation d'ordre dans les ordinaux

Nous avons remarqué, à propos des ordinaux finis, que  $2 = (0, 1)$  est à la fois un élément de  $4 = (0, 1, 2, 3)$  et une section commençante de 4. Ceci nous permet de définir une relation d'ordre dans les ordinaux. Mais comme nous travaillons toujours à un isomorphisme de bon ordre près (nous parlons ici de *copies*), nous dirons que

$\alpha \leq \beta$  si et seulement si  $\alpha$  est une copie d'une section commençante de  $\beta$ .

Il est remarquable que l'ordre défini ainsi est total et même un bon ordre sur les ordinaux (voir [2] p. 48).

Il est facile de voir que l'on a toujours  $\alpha < \alpha + 1$  puisqu'il est évident que ces deux ordinaux sont différents; de plus il n'y a aucun ordinal strictement compris entre  $\alpha$  et  $\alpha + 1$ . On pourrait imaginer construire tous les ordinaux en partant de 0 et en ajoutant 1 régulièrement. Seulement on ne construit de cette façon que les ordinaux qui ont un prédécesseur et on ne peut donc pas dépasser  $\omega$ .

#### 4.c. Ordinal limite et récurrence transfinitie

On dit qu'un ordinal est *limite* s'il n'est pas nul et s'il n'a pas de prédécesseur. Ainsi  $\omega$  est un ordinal limite et c'est même le plus petit ordinal limite.

En raison de l'existence des ordinaux limites, toute récurrence classique partant d'un ordinal  $\alpha$  ne peut dépasser le plus petit ordinal limite supérieur à  $\alpha$ . Par exemple, en partant d' $\omega + \omega$  on ne peut jamais atteindre  $\omega + \omega + \omega$ . Il existe cependant une notion de *récurrence transfinitie* qui permet de s'affranchir de cette difficulté. Si  $\mathcal{P}$  est une propriété portant sur les ordinaux satisfaite pour 0 et telle que pour tout ordinal  $\alpha$

$$(\forall \beta < \alpha \quad \mathcal{P}(\beta)) \implies \mathcal{P}(\alpha),$$

alors  $\mathcal{P}(\alpha)$  est vraie pour tous les ordinaux.

La démonstration se fait par l'absurde. Supposons que l'on puisse trouver  $\gamma$  avec  $\mathcal{P}(\gamma)$  faux. Considérons alors tous<sup>1</sup> les ordinaux  $\leq$  à  $\gamma$  pour lesquels la propriété  $\mathcal{P}$  n'a pas lieu et notons  $\lambda$  le plus petit de ces ordinaux (dont l'existence est assurée par le bon ordre). Il n'est pas nul et pour tout  $\beta < \lambda$  on a  $\mathcal{P}(\beta)$ . D'après l'hypothèse de récurrence on doit avoir  $\mathcal{P}(\lambda)$ , ce qui est contradictoire.

---

1. Nous escamotons ici les difficultés dues au fait que la « collection » de tous les ordinaux n'est pas un ensemble.

#### 4.d. Multiplication des ordinaux

Nous avons vu un cas particulier de multiplication quand nous avons calculé  $\omega + \omega$  que nous pouvons écrire  $\omega \times 2 = (0, 2, 4, 6, \dots, 1, 3, 5, 7, \dots)$ . On imagine assez facilement la multiplication d'un ordinal  $\alpha$  par un ordinal fini  $n$  : on met  $n$  copies d' $\alpha$  bout à bout en veillant à ne pas répéter deux fois les mêmes symboles.

Exemple :

$$\omega \times 5 = (0, 5, 10, 15, \dots, 1, 6, 11, 16, \dots, 2, 7, 12, 17, \dots, 3, 8, 13, 18, \dots, 4, 9, 14, 19, \dots)$$

où l'on a placé les nombres ayant un reste nul dans la division par 5, puis ceux ayant un reste 1, puis 2 puis 3 et enfin 4 en conservant l'ordre habituel dans chaque paquet.

Mais déjà se pose la question : a-t-on  $2 \times \omega = \omega \times 2$ ? Nous devons écrire  $\omega$  copies de  $2 = (0, 1)$  utilisant des symboles tous différents. Prenons  $2 = (2n, 2n+1)$  en faisant varier  $n$  depuis 0 jusqu'à l'infini. Nous obtenons ainsi

$$2 \times \omega = (0, 1; 2, 3; 4, 5; \dots) = \omega .$$

Les points-virgules ne sont là que pour faciliter la lecture et mettre en évidence les paquets de deux symboles ordonnés. A nouveau nous obtenons une opération non commutative.

Et combien vaut  $\omega \times \omega$ ? Il faut trouver  $\omega$  copies utilisant des symboles différents pour  $\omega$ . Le mieux serait de pouvoir utiliser les seuls entiers naturels. Nous avons déjà vu au deuxième exemple l'astuce due à SARKOVSKI :

$$\omega \times \omega = (1, 3, 5, \dots, 2, 6, 10, \dots, 4, 12, 20, \dots, \dots, 2^n \times 1, 2^n \times 3, 2^n \times 5, \dots, \dots) .$$

On place tous les nombres impairs puis les produits des nombres impairs par les puissances successives de 2. Remarquons que l'on aurait pu aussi écrire :

$$\begin{aligned} \omega \times \omega = & (0, 1, 2, 3, \dots, \\ & \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots, \\ & \omega \times 2, \omega \times 2 + 1, \omega \times 2 + 2, \omega \times 2 + 3, \dots, \\ & \dots\dots\dots, \\ & \omega \times n, \omega \times n + 1, \omega \times n + 2, \omega \times n + 3, \dots, \\ & \dots\dots\dots) \end{aligned}$$

C'est une autre façon de voir le produit<sup>2</sup> et qui peut facilement s'étendre en imaginant un livre infini. Chaque ligne peut être infinie et chaque page contient éventuellement un nombre infini de lignes. On peut aussi imaginer que le nombre de pages est infini et que l'ouvrage se décline en un nombre infini de tomes *etc.* Supposons que chaque ligne soit isomorphe à l'ordinal  $\alpha$ , et qu'il y ait  $\beta$  lignes sur chaque page, alors une page représentera l'ordinal  $\alpha \times \beta$ . Et s'il y a  $\gamma$  pages dans le livre, il représentera l'ordinal  $\alpha \times \beta \times \gamma$ , *etc.*

Voyons, sans démonstration, les principales propriétés de la multiplication (on notera au passage les différences avec la multiplication habituelle dans  $\mathbf{N}$ , ou, ce qui revient au même, la multiplication des ordinaux finis).



- $\alpha \times 0 = 0 \times \alpha = 0$ ; 0 est un élément absorbant.
- $\alpha \times 1 = 1 \times \alpha = \alpha$ ; 1 est élément neutre pour la multiplication.
- Pour tout triplet d'ordinaux  $(\alpha, \beta, \gamma)$  on a  $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$  ce qui traduit l'associativité (on pourra se convaincre de l'associativité en reprenant l'image du livre infini).
- Si trois ordinaux  $\alpha, \beta, \gamma$  sont tels que  $\alpha < \beta$  avec  $\gamma \neq 0$ , alors  $\gamma \times \alpha < \gamma \times \beta$ ; il y a conservation de l'inégalité stricte par multiplication à gauche. Mais,
- $\alpha < \beta \implies \alpha \times \gamma \leq \beta \times \gamma$ . Par exemple  $1 < 2$  mais  $1 \times \omega = 2 \times \omega = \omega$ .
- $\alpha \times \beta = 0 \implies \alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ .
- $\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$ ; il y a distributivité à gauche, mais pas à droite car  
 $(\omega + 1) \times 2 = (\omega + 1) + (\omega + 1) = \omega + (1 + \omega) + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega \times 2 + 1$   
 et non pas  $\omega \times 2 + 2$ .
- Pour tout triplet d'ordinaux  $(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\gamma \neq 0$  on a  
 $\gamma \times \alpha = \gamma \times \beta \implies \alpha = \beta$ , c'est-à-dire qu'on peut simplifier à gauche.
- Il existe une sorte de division euclidienne :  
 si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des ordinaux, il existe un unique ordinal  $\gamma$  et un unique ordinal  $\delta < \beta$  tel que  $\alpha = \beta \times \gamma + \delta$ . Cette division marche dans ce sens mais pas dans d'autre en raison de l'absence de commutativité tant de l'addition que de la multiplication.

#### 4.e. Exponentiation

L'exponentiation ne pose aucun problème tant qu'il s'agit d'ordinaux finis puisqu'alors le résultat est exactement le même que dans  $\mathbf{N}$ .

Il est assez facile de calculer  $2^\omega$  et de vérifier qu'il vaut  $\omega$ , de même que n'importe quel ordinal fini élevé à la puissance  $\omega$ . Nous avons calculé ci-dessus  $\omega \times \omega$  que l'on écrit assez naturellement  $\omega^2$ .

Il faut être un peu astucieux pour calculer  $\omega^n$  dans le cas  $n$  fini. Voyons ce que l'on peut faire pour  $n = 3$  en nous inspirant de ce qui a été fait pour  $n = 2$  où nous avons distingué les naturels suivant leur divisibilité par  $2^n$ . Nous allons donc les distinguer suivant leur divisibilité par  $2^n \times 3^p$  et écrire d'abord les entiers non multiples de 2 ou de 3, puis ces mêmes multipliés par 2, puis... par  $2^n$ , ... puis on reprend cette liste ainsi construite en multipliant chaque terme par 3, et on recommence en multipliant chaque terme par  $3^2$ , etc. Cela donne quelque chose comme

(1, 5, 7, 11, 13, ...,  
 2, 10, 14, 22, 26, ...,  
 4, 20, 28, 44, 52, ...,  
 ...,  
 3, 15, 21, 33, 39, ...,  
 6, 30, 42, 66, 78, ...,  
 12, 60, 84, 132, 156, ...,  
 ...,  
 9, 45, 63, 99, 117, ...,  
 18, 90, 126, 198, 234, ...,  
 36, 180, 252, 396, 468, ...,  
 ...,  
 .....)

Cela devient assez acrobatique pour calculer  $\omega^\omega$ . On s'inspire de l'exemple précédent en utilisant la décomposition d'un entier en facteurs premiers. Tout entier non nul se met de façon unique sous la forme  $2^a 3^b 5^c 7^d 11^e \dots$  où il n'y a qu'un nombre fini d'exposants non nuls. Un entier est alors caractérisé par la suite  $(a, b, c, d, e, \dots)$  et nous placerons les entiers selon une sorte d'ordre lexicographique inversé. Plus exactement les entiers apparaissent dans l'ordre suivant :

D'abord toutes les puissances de 2	1, 2, 2 <sup>2</sup> , 2 <sup>3</sup> , ...
Puis les puissances de 2 multipliées par 3	3, 2 × 3, 2 <sup>2</sup> × 3, ...
Puis multipliées par 3 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup> , 2 × 3 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> × 3 <sup>2</sup> , 2 <sup>3</sup> × 3 <sup>2</sup> , ...
Puis multipliées par 3 <sup>3</sup>	3 <sup>3</sup> , 2 × 3 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> × 3 <sup>3</sup> , 2 <sup>3</sup> × 3 <sup>3</sup> , ...
Jusqu'à épuisement des puissances de 3	.....
Puis on reprend tous les termes précédents que l'on multiplie par 5	5, 2 × 5, 2 <sup>2</sup> × 5, 2 <sup>3</sup> × 5, ...
	3 × 5, 2 × 3 × 5, 2 <sup>2</sup> × 3 × 5, ...
	3 <sup>2</sup> × 5, 2 × 3 <sup>2</sup> × 5, 2 <sup>2</sup> × 3 <sup>2</sup> × 5, ...
	.....
Puis de même en multipliant par 5 <sup>2</sup>	5 <sup>2</sup> , 2 × 5 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> × 5 <sup>2</sup> , ...
Jusqu'à épuisement des puissances de 5	.....

Puis on reprend tous les termes précédents que l'on multiplie par 7, puis par 7<sup>2</sup> et ainsi de suite.

Voilà ce qu'est  $\omega^\omega$ . Pas facile à écrire !

Donnons ci-après, sans démonstration, quelques propriétés de l'exponentiation.

- $\alpha$  étant un ordinal,  $1^\alpha = 1$ .
- Si  $\gamma > 1$  alors  $\alpha < \beta \iff \gamma^\alpha < \gamma^\beta$ . Il y a conservation de l'ordre strict, mais attention :
- pour trois cardinaux arbitraires  $\alpha, \beta, \gamma$ , on a  $\alpha \leq \beta \iff \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$  car a contrario on vérifie que  $2^\omega = 3^\omega = \omega$  alors que  $2 < 3$ .
- $\alpha^\beta \times \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$  et  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ .

De plus, en utilisant la division euclidienne et le fait que, deux ordinaux  $\alpha > 1$  et  $\beta \neq 0$  étant donnés, on trouve toujours un unique ordinal  $\delta$  tel que  $\alpha^\delta \leq \beta \leq \alpha^{\delta+1}$ , on peut construire une sorte de décomposition de  $\beta$  sur la base  $\alpha$ , c'est-à-dire construire des  $\gamma_i$  strictement compris entre 0 et  $\alpha$  et des  $\beta_i$  croissants tels que

$$\beta = \alpha^{\beta_n} \gamma_n + \dots + \alpha^{\beta_1} \gamma_1 + \alpha^{\beta_0} \gamma_0 .$$

#### 4.f. Et après ?

Malheureusement, en itérant les opérations arithmétiques que nous venons de définir, il n'est pas possible d'épuiser tous les ordinaux. Bien sûr, il est possible de calculer  $\omega^{\omega^\omega}$  mais on peut imaginer mettre une infinité d'exposants. On obtient, à la limite, un nouvel ordinal nommé  $\varepsilon_0$  qui est la solution de l'équation (en ordinaux)  $x = \omega^x$ . Et puis on recommence avec  $\varepsilon_0$  avec une infinité d'exposants qui valent tous  $\varepsilon_0$  pour obtenir  $\varepsilon_1$  etc. Et il n'y a aucune raison de s'arrêter :  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_\omega, \dots, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \dots$ . Mais même ainsi, on n'épuise pas tous les ordinaux. En effet, tous les ordinaux précédents correspondent à un bon ordre sur  $\mathbf{N}$ . Ils sont donc dénombrables. On note  $\Omega$  le plus petit ordinal non dénombrable... On pourrait penser qu' $\Omega$  a un lien avec  $\mathbf{R}$  mais cela suppose l'hypothèse du continu<sup>3</sup>.

À chaque fois que l'on manipule l'infini on se retrouve face à des propriétés surprenantes. Considérons-en une que nous utiliserons un peu plus loin et qui s'apparente à la récurrence descendante. Soit  $\alpha$  un ordinal et soit  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$  une suite décroissante d'éléments d' $\alpha$  (nous avons vu que chaque ordinal est à la fois un élément d'un ordinal plus grand et la section commençante de ce même ordinal plus grand). Alors cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

En effet, puisqu' $\alpha$  est bien ordonné, le sous-ensemble formé des  $\xi_i$  l'est aussi et il contient donc un plus petit élément  $\xi_n$  pour un certain  $n$ . Mais pour  $p > n$  on doit avoir à la fois  $\xi_p \geq \xi_n$  puisque  $\xi_n$  est le plus petit élément et  $\xi_p \leq \xi_n$  puisque la suite est décroissante et  $p > n$ . On en déduit que  $\xi_p = \xi_n$ .

Pour mieux comprendre ce résultat surprenant, il faut se souvenir qu'il est impossible de faire une soustraction. Ainsi, même en partant d' $\omega$  et en construisant la suite des  $\xi_i$  on est obligé de n'écrire que des ordinaux finis dès le deuxième terme.

---

3. Il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est compris entre celui de  $\mathbf{N}$  et celui de  $\mathbf{R}$ .

## 5. Une application des ordinaux : les suites de GOODSTEIN

Dans [1] Alain CONNES<sup>4</sup> en donne une version amusante : **le problème du lièvre et de la tortue**.

Prenez un nombre  $N$ , pas trop grand (5 par exemple).

Écrivez-le en base 2 :  $5 = 2^2 + 1$ .

Le lièvre arrive et remplace tous les 2 par des 3 et écrit  $3^3 + 1$ .

La tortue ne fait que retrancher 1 et écrit  $3^3$ .

Le lièvre remplace alors tous les 3 par des 4 et écrit  $4^4$ .

Puis la tortue retranche 1, ce qui donne en base 4 :  $3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 3$ .

Et le lièvre remplace tous les 4 par des 5 et ainsi de suite...

*Le lièvre parviendra-t-il à empêcher la tortue d'atteindre 0 ?*

Ce qui est étrange c'est que la tortue finit toujours par gagner au bout d'un nombre fini d'étapes et ce, bien que le lièvre semble faire des bonds gigantesques à chaque fois qu'il joue. Au bout d'un temps fini, on arrive à 0.

On peut démontrer que le nombre d'étapes nécessaire pour que la tortue gagne croît plus vite que n'importe quelle fonction de  $N$  que vous pouvez explicitement écrire<sup>5</sup>. Vous pouvez cependant programmer un ordinateur pour connaître le nombre d'étapes nécessaire pour une valeur particulière de  $N$ . Mais démontrer que la tortue gagne à tous les coups tient en quelques lignes à l'aide de la théorie des ordinaux.

Considérons la suite des nombres obtenus après chaque intervention que ce soit celle du lièvre ou celle de la tortue. Cette suite commence (dans le cas d'un départ à 5) par (5, 28, 27, 64, 63, 468, 467, ...). Associons à cette suite une suite d'ordinaux en remplaçant dans chaque écriture la base  $n$  par le premier ordinal infini,  $\omega$ . Nous obtenons

$(\omega^\omega + 1, \omega^\omega + 1, \omega^\omega, \omega^\omega, 3\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 3, 3\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 3, 3\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 2, \dots)$ .

Cette suite est décroissante donc elle est constante à partir d'un certain rang. Mais cette constante est nulle. En effet, après chaque intervention de la tortue, le terme de la suite associée décroît strictement (sauf si 0 a été obtenu). Or chaque terme de cette suite est, par construction, supérieur au terme de même rang de la suite initiale qui par conséquent se termine par 0 également.

Nous venons de démontrer, sous une forme imagée (pour une démonstration plus formelle voir [3]), le théorème de GOODSTEIN (démontré en 1944). Notons qu'il a été prouvé qu'il est impossible de démontrer ce théorème en n'utilisant que les axiomes de PEANO, c'est-à-dire l'arithmétique habituelle. Mais cette preuve (L. KIRBY et J. PARIS, 1982) est autrement plus ardue.

*On trouvera deux autres illustrations des ordinaux dans l'article qui suit.*

4. Dans la même interview il remarque que « It is only with CHOQUET [...] that I learnt the theory of ordinals. You might think that this theory is useless, but that's absolutely false ».

5. Dans le cas d'un départ à  $4 = 2^2$ , il faut un nombre d'étapes qui s'écrit en base dix avec plus de 48 millions 800 mille milliards de chiffres. Malgré la longévité légendaire des tortues il en faudra de nombreuses générations !

## Conclusion

Sans chercher à être tout à fait rigoureux et surtout sans chercher à faire toutes les démonstrations, le but de cette présentation était d'introduire à la notion d'ordinal en explicitant une forme possible, celle correspondant à un bon ordre sur  $\mathbf{N}$ . Cela permet, peut-être, de mieux se familiariser avec la notion d'ordinal et de pouvoir ensuite l'aborder de façon très rigoureuse et axiomatique sous la forme que l'on trouve habituellement dans les ouvrages récents et qui repose sur la définition suivante due à John von NEUMANN.

Un *ordinal*  $\alpha$  est un ensemble vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Il est bien ordonné par la relation d'appartenance ( $\in$ ).
- Il est transitif, c'est-à-dire que  $\forall x, x \in \alpha \implies x \subset \alpha$ .

Dans ce cadre, on écrit habituellement les premiers ordinaux sous la forme

$$0 = \{\}, 1 = \{\{\}\}, 2 = \{\{\}, \{\{\}\}\}, 3 = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}, \dots$$

que les tenants du bourbakisme reconnaîtront facilement.

Il y a bien évidemment des liens qui apparaissent entre la notion d'ordinal et celle plus connue de cardinal, mais ici encore avec des surprises, tant la manipulation de l'infini nous fait sortir des schémas habituels.

# DEUX EXEMPLES DE RÉCURRENCE TRANSFINIE

**Résumé :** Pour compléter l'article précédent sur les ordinaux nous présentons deux illustrations (certes classiques) de la récurrence transfinie : l'existence d'une base de  $\mathbb{R}$  considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  et une description de la structure des fermés du plan.

**Mots-clés :** Base d'un espace vectoriel, fermé du plan, ordinal, récurrence transfinie.

Les ordinaux sont inséparables de la récurrence transfinie, indispensable pour étudier même leurs propriétés les plus élémentaires. Les deux concepts ont été inventés simultanément, dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, par G. CANTOR ; au départ, son but n'était pas d'explorer l'infini, mais de résoudre une question d'analyse (décrire les « ensembles d'unicité » pour les séries de Fourier), qui l'a amené à explorer en profondeur la structure des ensembles fermés. Ce n'est qu'ensuite, après avoir ainsi pris pied dans l'infini, qu'il a créé et développé la théorie des ensembles.

## 1. Existence d'une base de $\mathbb{R}$ , espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$

C'est un exercice classique, dans les leçons introductives aux espaces vectoriels, que de montrer que  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels. Rappelons qu'une base d'un espace vectoriel sur un corps est une partie  $B$  de cet espace telle que tout élément de l'espace puisse s'écrire **de façon unique** comme combinaison linéaire **finie** à coefficients dans le corps d'éléments de  $B$  (que  $B$  soit un ensemble fini ou infini). On se souviendra, par exemple, que l'ensemble des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$ ) qui admet une base dénombrable.

Pour démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}$  considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ , on procède par récurrence comme en dimension finie. Seulement, la dimension étant infinie et même non dénombrable, la récurrence doit ici être transfinie<sup>1</sup>. En voici les principales étapes.

- On oublie l'ordre habituel sur  $\mathbb{R}$  et on fixe une fois pour toutes un bon ordre sur  $\mathbb{R}$ . C'est grâce au théorème de ZERMELO, équivalent à l'axiome du choix, que nous sommes assurés de l'existence d'un bon ordre sur tout ensemble, et donc en particulier sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour toute partie  $A \subset \mathbb{R}$ , on notera  $\langle A \rangle$  le sous-espace vectoriel (sur  $\mathbb{Q}$ ) engendré par  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires  $\sum_{i=1}^n q_i a_i$ , où  $n$  peut être n'importe quel entier, les  $a_i$  sont dans  $A$  et les coefficients  $q_i$

---

1. Le même argument établirait plus généralement l'existence d'une base de n'importe quel espace vectoriel sur un corps quelconque ; le cas de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Q}$  n'est pas plus simple que le cas général.

dans le corps  $\mathbb{Q}$ . Du fait que  $\mathbb{R}$  a été bien ordonné, pour toute partie  $A \subset \mathbb{R}$  telle que  $\langle A \rangle \neq \mathbb{R}$  on peut alors définir un réel  $x_A$  par

$$x_A = \text{le plus petit élément (bon ordre!) de } \mathbb{R} \setminus \langle A \rangle .$$

L'idée va être de construire des sous-espaces vectoriels emboîtés de plus en plus gros en rajoutant à chaque fois un nouvel élément pris à l'extérieur du dernier sous-espace.

Le plus simple est de partir de  $A_0 = \emptyset$ , d'où  $\langle A_0 \rangle = \{0\}$ , puis on pose  $x_{A_0}$  égal au plus petit élément non nul de  $\mathbb{R}$  et on définit  $A_1 = A_0 \cup \{x_{A_0}\}$ . On recommence en déterminant  $x_{A_1}$ , le plus petit élément de  $\mathbb{R} \setminus \langle A_1 \rangle$ , (on remarquera que  $\langle A_1 \rangle$  est isomorphe à  $\mathbb{Q}$ ) et on pose  $A_2 = A_1 \cup \{x_{A_1}\}$ , etc.

- C'est là qu'intervient la récurrence transfinie. Le procédé ci-dessus, qui définit  $A_1$  à partir de  $A_0$ ,  $A_2$  à partir de  $A_1$ , etc., ne convient pas pour un ordinal limite qui n'a pas de prédécesseur ; il nous faut donc une procédure spéciale pour construire  $A_\alpha$  quand  $\alpha$  est un ordinal limite. On pose donc

$$A_\alpha = \begin{cases} A_\beta \cup \{x_{A_\beta}\} & \text{si } \alpha = \beta + 1 , \\ \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta & \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite .} \end{cases}$$

Cette construction est possible tant que  $\langle A_\alpha \rangle \neq \mathbb{R}$ . Comme  $A_\alpha$  a autant d'éléments que  $\alpha$ , et comme il existe des ordinaux ayant plus d'éléments que  $\mathbb{R}$ , il arrivera nécessairement un  $\gamma$  pour lequel  $\langle A_\gamma \rangle = \mathbb{R}$ . On dit alors que l'ensemble  $A_\gamma$  est générateur : tout réel s'écrit comme combinaison linéaire rationnelle d'un nombre fini d'éléments de  $A_\gamma$ .

- Pour montrer que  $A_\gamma$  est une base, il reste à vérifier qu'une telle écriture est unique, à l'ordre et aux termes nuls près, c'est-à-dire que la partie  $A_\gamma$  est libre : si l'on écrit 0 comme combinaison d'éléments de  $A_\gamma$ , tous les termes doivent être nuls. Pour cela, on vérifie, par récurrence transfinie bien sûr, que chaque  $A_\alpha$  est libre.

Le passage de  $\alpha$  à  $\alpha + 1$  se fait facilement, exactement comme en dimension finie : si  $A$  est libre,  $A \cup \{x_A\}$  l'est aussi parce que  $x_A \in \mathbb{R} \setminus \langle A \rangle$ .

Le cas où  $\alpha$  est un ordinal limite se traite en remarquant que si  $0 = \sum_{i=0}^n q_i a_i$  où les coefficients  $q_i$  appartiennent à  $\mathbb{Q}$  et où les  $a_i$  sont des éléments deux-à-deux distincts de  $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ , alors chaque  $a_i$  est dans un  $A_{\beta_i}$  donc aussi dans  $A_\mu$  où  $\mu = \max(\beta_1, \dots, \beta_n)$  ( $\mu$  existe parce que l'ordre est total). Chaque terme  $q_i a_i$  est nul parce que  $A_\mu$ , qui est l'un des  $A_{\beta_i}$ , est libre par hypothèse de récurrence.

Il faut se garder d'interpréter l'ordinal  $\gamma$  comme la dimension de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}$  ; il dépend du bon ordre choisi, et pas seulement de l'espace  $\mathbb{R}$  et du corps  $\mathbb{Q}$ . La seule notion invariante est le cardinal de  $\gamma$ , égal à la puissance du continu.

## 2. Structure des fermés du plan

Voici comment CANTOR épluche transfiniment un fermé pour exposer sa structure. Nous parlerons des fermés du plan (c'est plus visuel)<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>. Au départ, c'est à des fermés unidimensionnels (sur le cercle trigonométrique) que s'intéressait CANTOR, mais cela ne change rien.

Rappelons qu'un sous-ensemble  $F$  du plan est *fermé* si pour toute suite convergente  $(x_n)$  de points du plan telle que chaque  $x_n$  soit dans  $F$ , le point limite  $\lim_n x_n$  est également dans  $F$ . Exemples : l'ensemble vide, le plan tout entier, un disque fermé, une suite convergente avec sa limite.

Le complémentaire d'un fermé est un *ouvert*. La structure des ouverts est assez simple : on montre que tout ouvert est la réunion d'une suite de disques ouverts<sup>3</sup>. Mais les fermés sont plus compliqués : en dimension 1, pensez à l'ensemble triadique de Cantor, qui a la puissance du continu mais ne contient aucun intervalle (sauf bien sûr ses points); dans le plan, c'est encore pire; regardez par exemple les ensembles de JULIA<sup>4</sup> dans [1] p. 88, 95 ou 99.

Toute partie  $F$  du plan, fermée ou non, est faite de deux sortes de points : les *points isolés* de  $F$  et les *points d'accumulation* de  $F$ .

*Un point  $x \in F$  est isolé si, pour un certain  $\varepsilon > 0$ , la distance de  $x$  à tout autre point de  $F$  est  $\geq \varepsilon$ .*

*Au contraire,  $x$  est un point d'accumulation de  $F$  s'il existe dans  $F$  des points différents de  $x$  mais aussi proches de  $x$  que l'on veut.*

Par exemple,

- si  $F$  est le réseau des points à coordonnées entières, tous ses points sont isolés ;
- un disque fermé de rayon non nul n'a pas de point isolé ;
- Si  $(x_n)$  est une suite de points qui converge vers une limite  $x_\infty$  et si  $x_n \neq x_\infty$  pour tout  $n$  fini, tous les points du fermé  $F = \{x_n, n \leq \infty\}$  sont isolés, sauf  $x_\infty$ .

Pour comprendre ce qu'a découvert (ou inventé ?) CANTOR, il nous faut préalablement savoir deux choses : primo, les points isolés de  $F$  sont en quantité dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut les numéroter par des entiers, ou par tous les entiers); et secundo, si  $F$  est fermé, l'ensemble des points d'accumulation de  $F$  est lui aussi fermé. On peut démontrer sans peine ces résultats en utilisant les définitions ci-dessus, mais nous allons nous contenter d'admettre ces deux propriétés pour aller directement savourer la beauté du travail de CANTOR.

Si un fermé  $F$  n'a pas de point isolé, on dit que  $F$  est *parfait*. Nous allons voir comment un argument transfini permet de décomposer tout fermé  $F$  en deux sous-ensembles disjoints, dont l'un est dénombrable (ses éléments peuvent être numérotés par des entiers) et l'autre est le plus gros parfait inclus dans  $F$ .

Nous avons rappelé que lorsqu'à un fermé  $F$  on ôte tous ses points isolés, on obtient un nouveau fermé (l'ensemble des points d'accumulation de  $F$ ); il est noté  $F'$  et appelé le *dérivé* de  $F$ , l'opération  $F \mapsto F'$  étant la *dérivation de Cantor*. Il serait naïf de croire que  $F'$ , obtenu en enlevant à  $F$  ses points isolés, n'a pas de points isolés.

- Dans l'exemple vu plus haut du fermé  $F = \{x_n, n \leq \infty\}$  formé d'une suite et de son point limite,  $F'$  n'a qu'un seul point,  $x_\infty$ , évidemment isolé (dans  $F'$  mais pas dans  $F$ ), et  $F'' = (F')'$  est vide.

---

3. En dimension 1, c'est encore plus simple : tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est la réunion d'une suite d'intervalles ouverts disjoints.

4. Ce sont entre autre des ensembles parfaits (la définition en est donnée ci-dessous).



- On pourrait compliquer cet exemple : si  $F = \{x_{m,n}, m \leq \infty, n \leq \infty\}$ , où les coordonnées de  $x_{m,n}$  sont  $(1/m, 1/n)$ , alors  $F'$  est formé des  $x_{m,n}$  tels que  $m$  ou  $n$  soit infini,  $F''$  du seul point  $x_{\infty, \infty}$ , et  $F'''$  est vide.
- Pour chaque entier  $n$ , on peut sans trop de peine concevoir un fermé dont les  $n$  premiers dérivés (son dérivé, le dérivé de celui-ci, etc.) sont différents.

Par exemple en remarquant que *tout fermé  $F$  est un dérivé*. En effet, il suffit, pour chaque  $x$  isolé dans  $F$ , d'adjoindre à  $F$  toute une suite de points qui tendent vers  $x$  et qui sont plus proches de  $x$  que de tout autre point de  $F$ ; le fermé ainsi grossi admet  $F$  pour dérivé. En partant d'un fermé non parfait et en effectuant  $n$  fois cette anti-dérivation, on obtient un fermé dont le  $n$ -ième dérivé n'est pas parfait, et dont les  $n$  premiers dérivés sont donc tous différents.

- Essayez maintenant d'imaginer un fermé construit comme suit. On part d'une suite  $(D_1, D_2, \dots)$  de disques fermés disjoints, dont les rayons tendent vers zéro, et les centres vers un point limite  $\{x\}$ . À l'intérieur de  $D_n$ , on place un fermé  $F_n$  dont le  $n$ -ième dérivé n'a qu'un seul point. On prend pour  $F$  la réunion des  $F_n$  et de  $\{x\}$ . Lorsque l'on dérive  $n+1$  fois le fermé  $F$ , tout ce qui est dans  $D_1, D_2, \dots, D_n$  disparaît, mais il reste des points dans  $D_{n+1}, D_{n+2}$ , etc. et lorsque  $n$  tend vers l'infini, seul le point  $x$  subsiste. C'est là que CANTOR manifeste son génie : il sort du chapeau l'ordinal  $\omega$ , définit le  $\omega$ -ième dérivé de  $F$  comme étant le singleton  $\{x\}$ , et constate que le  $(\omega+1)$ -ième dérivé de  $F$  est vide.
- Une fois qu'on a saisi le truc, on peut compliquer autant qu'on veut : par exemple, en reprenant les disques  $D_n$ , mais en mettant cette fois-ci dans chaque  $D_n$  une copie (homothétique) du  $F$  précédent, et en prenant la réunion de ces copies et du point limite  $\{x\}$ , on a un nouveau fermé, dont c'est maintenant le  $(\omega+1)$ -ième dérivé qui vaut  $\{x\}$  et le  $(\omega+2)$ -ième qui est vide. Et il n'y a bien sûr aucune raison de s'arrêter là...

En partant d'un fermé  $F$  quelconque, les dérivations itérées décrites ci-dessus peuvent être formalisées comme une récurrence transfinie : on ne se contente pas de définir le  $n$ -ième dérivé  $F^{(n)}$  de  $F$  pour tout  $n$  fini, mais on introduit  $F^{(\alpha)}$  pour tout ordinal  $\alpha$ . La formule, qui suppose  $F^{(\beta)}$  déjà défini pour tout ordinal  $\beta$  inférieur à  $\alpha$ , distingue deux cas, suivant que  $\alpha$  a ou non un prédécesseur :

$$F^{(\alpha)} = \begin{cases} (F^{(\beta)})' & \text{si } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcap_{\beta < \alpha} F^{(\beta)} & \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$$

Remarquer par récurrence que  $F^{(\alpha)}$  est fermé, soit comme dérivé d'un fermé, soit comme intersection de fermés. La suite transfinie des fermés  $F^{(\alpha)}$  est décroissante :  $F^{(\alpha)}$  est inclus dans  $F^{(\beta)}$  lorsque  $\alpha > \beta$ . Si, pour un ordinal  $\gamma$ , le  $\gamma$ -ième dérivé  $F^{(\gamma)}$  se trouve être parfait, donc égal à son dérivé, un point fixe est atteint, et l'on a  $F^{(\delta)} = F^{(\gamma)}$  pour tout ordinal  $\delta \geq \gamma$ .

Arrivé là, CANTOR démontre que, si compliqué que puisse être le fermé  $F$  initial, il existe toujours un ordinal *dénombrable*  $\gamma$  tel que le dérivé  $F^{(\gamma)}$  soit parfait.

Comme l'ensemble  $F - F'$  des points isolés d'un fermé  $F$  est dénombrable le passage de  $F$  à  $F^{(\gamma)}$  se fait donc en un « nombre » dénombrable d'étapes, lors

de chacune desquelles on a supprimé un « nombre » dénombrable de points. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables étant elle-même toujours dénombrable, il en résulte que l'ensemble  $F - F^{(\gamma)}$  des points supprimés est dénombrable ; on a ainsi une décomposition de  $F$  en deux sous-ensembles, l'un,  $F - F^{(\gamma)}$  étant dénombrable, et l'autre,  $F^{(\gamma)}$  étant parfait. En outre,  $F^{(\gamma)}$  est le plus gros parfait inclus dans  $F$ , car une récurrence transfinie immédiate établit que, si un parfait est inclus dans  $F$ , il est aussi inclus dans chaque  $F^{(\alpha)}$ , et en particulier dans  $F^{(\gamma)}$ .

Il reste bien sûr à démontrer l'existence d'un tel  $\gamma$ , mais nous espérons que le lecteur qui nous aura suivi jusque là voudra bien nous croire sur parole ou aller consulter [2] p. 62 pour une démonstration dans le cas des fermés de  $\mathbb{R}$ .

Trois commentaires pour conclure.

- a) D'abord, le plus petit ordinal  $\gamma$  tel que  $F^{(\gamma)}$  soit parfait est dénombrable, mais ne peut pas être borné parmi les ordinaux dénombrables : pour tout ordinal dénombrable  $\alpha$ , on peut construire un fermé  $F$  suffisamment compliqué pour que  $F^{(\alpha)}$  ne soit pas parfait.
- b) Nous avons censuré une partie du scénario. CANTOR travaillait sur certains fermés, les « ensembles d'unicité », qu'il cherchait aussi petits que possible. Or si  $F$  est un ensemble d'unicité, tous ses dérivés  $F^{(\alpha)}$  en sont aussi, y compris la partie parfaite  $F^{(\gamma)}$  de  $F$  ; l'étude des ensembles d'unicité est ainsi ramenée à celle des parfaits d'unicité. C'était cela qui intéressait CANTOR, les ordinaux n'étant qu'un moyen pour y parvenir ; aujourd'hui, les ensembles d'unicité n'intéressent qu'une poignée de spécialistes et les ordinaux l'ont rendu immortel...
- c) Enfin, il n'est pas difficile de montrer que tout parfait non vide a la puissance du continu (c'est-à-dire autant de points que  $\mathbb{R}$ ) ; CANTOR en déduit aussitôt que *tout fermé est soit fini, soit infini dénombrable, soit continu*. Il a longtemps cherché à prouver que c'est vrai non seulement pour les fermés, mais pour tous les sous-ensembles du plan. C'est la célèbre hypothèse du continu, dont on sait maintenant qu'elle n'est ni réfutable (GÖDEL, 1938) ni démontrable (COHEN, 1963) dans le cadre de la théorie des ensembles habituelle, même avec axiome du choix.