1.2

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examinateur.

Remarque particulière :

Pour tout n, $k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, on rappelle que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est aussi noté C_n^k.

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles. L'addition usuelle et le produit de Cauchy $((a \cdot b)_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q)$ insuisent sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une structure d'anneau commutatif. On l'appelle l'anneau des *séries formelles* sur $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}[[X]]$. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors notée $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Les opérations usuelles dans l'anneau des séries formelles s'expriment formellement comme les mêmes opérations sur les séries entières usuelles.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique et C^1 par morceaux. On associe à la fonction f la série de fonctions

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx}, \quad N \geq 0,$$

où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ sont les *coefficients de Fourier*. Un théorème de Dirichlet nous assure que la série de fonctions $S_N(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Polynômes de Bernoulli

Sur l'espace $\mathbb{R}[[x]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{R}$, on a l'opérateur Δ qui à une série formelle $P(x)$ associe la série formelle :

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$$

On appelle Δ l'*opérateur de pseudo-dérivation* en raison des nombreuses analogies qui le relient à l'opérateur de dérivation (que nous noterons ∂ ou ∂_x si l'on veut préciser la variable).

Il est intéressant d'étudier l'opérateur φ obtenu en composant à droite Δ par l'inverse (à droite) de ∂. On obtient alors l'opérateur qui à une série formelle $P(x)$ associe la série formelle :

$$\varphi P(x) = \left(\Delta \circ \int\right) P(x) = \int_x^{x+1} P$$

Proposition 0.1. *L'opérateur φ, restreint à $\mathbb{R}[x]$, est un isomorphisme préservant le degré.*

Démonstration.
Soit $P(x)$ un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et donnons-nous $Q(x)$ sa primitive sans terme constant ; alors $\varphi P(x) = Q(x+1) - Q(x)$.

En écrivant $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ on a $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} x^{k+1}$ et :

$$\varphi P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} \left((x+1)^{k+1} - x^{k+1}\right)$$

À la vue de cette expression, il est clair que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. Et il est aussi clair que le degré de $\varphi P(x)$ est celui de $P(x)$; cela implique que φ est un isomorphisme. □

L'image directe de la base canonique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par φ se calcule sans peine : c'est la base $\left(\frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ce n'est pas aussi évident de trouver son image réciproque ; notons donc $B_n(x)$ l'unique polynôme (de degré n) tel que $\varphi B_n(x) = x^n$ — ie. $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la base réciproque de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par φ.

Pour étudier ces polynômes, on peut introduire leur série génératrice $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$. On a alors :

$$\varphi S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^n = e^{tx}$$

Or, il est clair qu'un antécédant de e^{tx} par φ est $\frac{t}{e^t - 1} e^{tx}$.

Ainsi, on peut définir des quantités $B_n(x)$ comme étant les coefficients du développement en série de la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1} e^{tx}$.

On pourra ensuite vérifier que ces quantités ont bien les propriétés attendues ; en particulier, qu'il s'agit bien de l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}[x]$ par φ.

1 Définitions et propriétés élémentaires

1.1 Définitions

Définissons donc, comme suggéré plus haut, les polynômes de Bernoulli à partir de leur série génératrice :

Définition 1.1.1. *La suite des* polynômes de Bernoulli*, notée* $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$*, est l'unique suite telle qu'on ait le développement en série :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}}$$

Voici les premières valeurs des polynômes de Bernoulli que Lehonard Euler a obtenu en 1738 [Eul38] :

n	$B_n(x)$
0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$

Définissons maintenant les nombres de Bernoulli qui ne sont que les termes constants des polynômes de Bernoulli :

Définition 1.1.2. *On note* $B_n = B_n(0)$ *le* n*-ième* nombre de Bernoulli*. La suite des nombres de Bernoulli est donc l'unique suite telle qu'on ait le développement en série :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \frac{t}{e^t - 1}}$$

On peut calculer facilement les premières valeurs des nombres de Bernoulli :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$\frac{-691}{2730}$

L'observation de ces valeurs motive cette proposition :

Proposition 1.1.3. *Pour* $n \geq 2$ *et* n *impair,* $B_n = 0$.

Démonstration.
Cela ne fait que refléter le fait que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1} + \frac{1}{2}t$ est paire. On a en effet :

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t\frac{e^t + 1}{e^t - 1}$$

Et le résultat découle du fait que $t \mapsto \frac{e^t+1}{e^t-1}$ est impaire :

$$\frac{e^{-t} + 1}{e^{-t} - 1} = \frac{\frac{1}{e^t} + 1}{\frac{1}{e^t} - 1} = -\frac{e^{-t} + 1}{e^{-t} - 1}$$

Cette proposition rend les polynômes de Bernoulli explicites lorsqu'on connaît les nombres de Bernoulli :

Proposition 1.1.4. *On a la relation suivante :*

$$\boxed{B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}}$$

Démonstration.

Il suffit de développer par rapport à x la série qui définit les polynômes de Bernoulli :

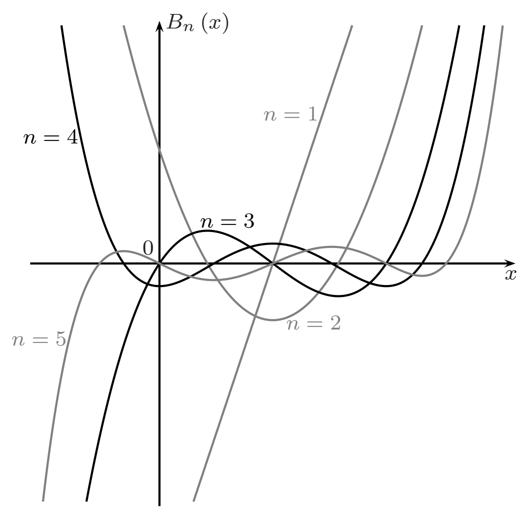
$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tx)^j}{j!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tx)^j}{j!} \right)$$

Et, par définition, $B_n(x)$ est le coefficient de t^n dans cette série double :

$$B_n(x) = \sum_{k+j=n} \frac{B_k}{k!j!} x^j = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}$$

□

En particulier, le n-ième polynôme de Bernoulli est un polynôme de degré n.



Les premiers polynômes de Bernoulli

1.2 Propriétés élémentaires

Tout d'abord, voici une propriété de pseudo-dérivation des polynômes de Bernoulli :

Proposition 1.2.1. *On a, pour $n \geq 1$:*

$$\Delta B_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

Démonstration.

On écrit simplement :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!} t^n = \frac{te^{t(x+1)}}{e^t - 1} - \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = te^{xt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} t^n$$

La proposition découle de l'identification des coefficients des séries.

□

L'application directe de cette formule est le théorème 3.1.1 ; mais il y a aussi ce résultat :

Corollaire 1.2.2. *On a la formule de récurrence suivante :*

$$\boxed{B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k}$$

Démonstration.
Pour cela, il suffit de spécialiser notre proposition en $x = 0$; alors, on obtient $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$ pour $n \geq 1$. En utilisant alors la proposition 1.1.4, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B_k = B_{n+1}, \text{ ou encore, } \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k B_k = 0$$

Et, en sortant le terme en B_n de la somme, on a le corollaire.

□

Notons que cette proposition nous permet d'affirmer, par récurrence, le fait que les nombres de Bernoulli sont rationnels — et donc, par la proposition 1.1.4, que les polynômes de Bernoulli sont dans $\mathbb{Q}[x]$.

Proposition 1.2.3. *On a la formule suivante :*

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

Démonstration.
Il suffit de faire la petite transformation suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-x)}{n!} t^n = \frac{te^{t(1-x)}}{e^t - 1} = \frac{te^{-tx}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-t)^n$$

La proposition n'est alors que l'identification des coefficients des séries.

□

En combinant cette proposition avec la proposition 1.2.1, et en la spécialisant en $x = 0$, on retrouve la nullité des B_n pour $n \geq 2$ impair.

Démontrons encore deux égalités que nous utiliserons ensuite.
Ce premier résultat a été obtenu en 1882 par Paul Émile Appell [App82] :

Proposition 1.2.4. *On a, pour $n \geq 1$:*

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

Démonstration.
Pour cela, il suffit de dériver par rapport à x la série qui définit les polynômes de Bernoulli :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_x B_n(x)}{n!} t^n = \partial_x \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \frac{t^2 e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n$$

La proposition n'est alors que l'identification des coefficients des séries.

□

Proposition 1.2.5. *On a, pour $n \geq 1$:*

$$\int_0^1 B_n(t)\, dt = 0$$

Démonstration.
À l'instar de la proposition précédente, on intègre pour $x \in [0; 1]$ la série qui définit les polynômes de Bernoulli :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^1 B_n(x)\, dx}{n!} t^n = \frac{\int_0^1 te^{tx} dx}{e^t - 1} = \frac{e^t - 1}{e^t - 1} = 1$$

La proposition n'est alors que l'identification des coefficients des séries.

□

1.3 Autres définitions

Certaines des propriétés que nous avons établies permettent de donner d'autres définitions pour les nombres et les polynômes de Bernoulli. Bien évidemment, ces définitions sont toutes équivalentes.

On peut définir la suite des nombres de Bernoulli par récurrence en utilisant le corollaire 1.2.2 (toutefois, il est clair que cette forme ne se prête que peu aux calculs) :

Définition 1.3.1. *La suite des* nombres de Bernoulli*, notée* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, est la suite dont le premier terme est* $B_0 = 1$ *et qui vérifie la relation de récurrence :*

$$\boxed{B_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k}$$

La proposition 1.2.4 caractérise par récurrence les polynômes de Bernoulli à une constante près. De plus, cette constante peut être déterminée par la proposition 1.2.5 :

Définition 1.3.2. *La suite des* polynômes de Bernoulli*, notée* $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$*, est la suite dont le premier terme est* $B_0(x) = 1$ *et qui vérifie la relation de récurrence :*

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \quad et \quad \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$$

Remarquons qu'on aurait pu remplacer la condition $\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ par la condition $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n \neq 1$.

La définition qui suit est ce qui a motivé la définition initiale. Elle montre les qualités que, dans la section 0, nous souhaitions voir attribuées aux polynômes de Bernoulli.

C'est la définition qui est de loin la plus naturelle.

Définition 1.3.3. *Le* n*-ième* polynôme de Bernoulli*, noté* $B_n(x)$*, est l'unique polynôme qui vérifie :*

$$\boxed{\int_y^{y+1} B_n(x)\,dx = y^n}$$

Démonstration.

Le fait que les polynômes de Bernoulli satisfassent cette relation est une conséquence directe de la proposition 1.2.1.

L'unicité de ces polynômes a été démontrée dans la preuve de la proposition 0.1.

□

Bien entendu, on pourrait, à partir de ces définitions, redémontrer les résultats que nous avons obtenus précédemment.

*

* *

2 La relation de distribution

2.1 Pour les polynômes de Bernoulli

Définition 2.1.1. *On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie la relation de distribution pour l'ordre n lorsque :*

$$\boxed{\sum_{r=0}^{m-1} f\left(\frac{t+r}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-1}} f(t)}$$

Ce résultat a été obtenu par Joseph Ludwig Raabe en 1851 [Raa51] :

Théorème 2.1.2. *Le n-ième polynôme de Bernoulli, B_n, vérifie la relation de distribution pour l'ordre n.*

Démonstration.

Procédons par équivalences :

$$\begin{aligned} & \forall n, \sum_{r=0}^{m-1} B_n\left(\frac{t+r}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-1}} B_n(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall n, \sum_{r=0}^{m-1} (xm)^n B_n\left(\frac{t+r}{m}\right) = mx^n B_n(t) \end{aligned}$$

En sommant suivant les n, on a une égalité de séries équivalente à ce qui précède. On identifie la série qui définit $B_n(t)$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \sum_{r=0}^{m-1} \frac{xme^{xm\frac{t+r}{m}}}{e^{xm}-1} = m\frac{xe^{xt}}{e^{x}-1} \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{r=0}^{m-1} \frac{e^{xr}}{e^{xm}-1} = \frac{1}{e^{x}-1} \end{aligned}$$

Et cette dernière égalité n'est rien d'autre que la somme d'une série géométrique. Cela prouve le théorème.

□

On peut aussi proposer une seconde démonstration tout aussi simple en partant de la définition 1.3.3 :

Démonstration.

Pour cela, il suffit de découper l'intégrale de définition puis de faire un changement de variable affine :

$$\begin{aligned} m^n\left(\frac{y}{m}\right)^n &= m^n \int_{\frac{y}{m}}^{\frac{y}{m}+1} B_n(x)\,dx = m^n \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\frac{y}{m}+\frac{k}{m}}^{\frac{y}{m}+\frac{k+1}{m}} B_n(x)\,dx \\ = y^n &= \int_{y}^{y+1} \frac{m^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(\frac{t+k}{m}\right) dt \end{aligned}$$

Alors, l'unicité des polynômes de Bernoulli permet de conclure.

□

2.2 Pour les polynômes réduits de Bernoulli

Pour de nombreuses applications[a], il est intéressant de considérer, non pas les polynômes de Bernoulli, mais des fonctions périodiques définies à partir de ces polynômes.

Comme nous avons vu qu'en conséquence de la proposition 1.2.1, pour tout $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$, il est naturel de poser la définition :

Définition 2.2.1. *Les polynômes réduits de Bernoulli, notés $\overline{B}_n$, sont définis pour $n \neq 1$ par :*

$$\boxed{\overline{B}_n(x) = B_n(x \bmod 1)}$$

Pour $n = 1$, cette définition n'est pas satisfaisante en $0 = x \bmod 1$; la bonne définition est alors :

$$\overline{B}_1(x) = \left\{ \begin{array}{cc} (x \bmod 1) - \frac{1}{2} & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Dans ce qui précède, on a bien sûr noté $x \bmod 1 = x - \lfloor x \rfloor$. On note très souvent $\overline{B}_1(x) = ((x))$.

Ainsi, la proposition 1.2.1 spécialisée en $x = 0$ donne la continuité des $\overline{B}_n$ pour $n \neq 1$.

Avant de montrer la relation de distribution, montrons ce résultat qui, en plus de nous familiariser avec les polynômes réduits de Bernoulli, nous sera très utile ensuite :

Proposition 2.2.2. *On a, pour $n \geq 1$ et $x \notin \mathbb{Z}$:*

$$\overline{B}'_n(x) = n\overline{B}_{n-1}(x)$$

Démonstration.

La proposition 1.2.4 nous donne le résultat sur $]0;1[$ et, par périodicité, il s'étend sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Remarquons que ce résultat est vrai sur tout $\mathbb{R}$ lorsque $n \geq 3$.

□

Théorème 2.2.3. *Le n-ième polynôme réduit de Bernoulli, $\overline{B}_n$, vérifie la relation de distribution pour l'ordre n.*

Démonstration.

Montrons cela comme une conséquence du résultat pour les polynômes de Bernoulli. Il s'agit de montrer :

$$\sum_{r=0}^{m-1} \overline{B}_n\left(\frac{t+r}{m}\right) = \sum_{x \in \left\{\frac{t+r}{m} \mid r \in \{0 \ldots m-1\}\right\}} \overline{B}_n(x) = \frac{1}{m^{n-1}} \overline{B}_n(t)$$

Comme la fonction $\overline{B}_n$ est 1-périodique, on peut faire la sommation dans le second membre pour $x \in \left\{\frac{t - \lfloor t \rfloor + r}{m} \mid r \in \{0 \ldots m-1\}\right\}$; alors, la valeur de $\overline{B}_n$ en ces x est exactement $B_n(x)$ et le résultat découle alors du précédent.

□

*

* *

[a] Notamment, des applications en analyse, que ce soit de l'analyse de Fourier (cf. calcul des valeurs de la fonction ζ de Riemann en les entiers pairs à la partie 3.4) ou pour la formule d'Euler-MacLaurin (cf. partie 3.5).

3 Applications diverses

Pour illustrer l'importance des nombres de Bernoulli, nous proposons quelques exemples qui montrent leur présence dans des domaines très divers des mathématiques.

3.1 Des sommes de puissance d'entiers

Commençons par la première application historique :

Théorème 3.1.1 (formule de Faulbaher)**.** *Si l'on note S_n^m la somme des puissance n-ièmes des m premiers entiers (ie. $S_n^m = \sum_{k=0}^m k^n$), on a :*

$$\boxed{S_n^{m-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k B_k m^{n+1-k}}$$

Démonstration.

La proposition 1.2.1 nous donne une somme téléscopique :

$$S_n^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} k^n = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)}{n+1} = \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0)}{n+1}$$

On applique alors la proposition 1.1.4 :

$$S_n^{m-1} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B_k m^{n+1-k} - B_{n+1}(0)\right)$$

Or on sait que $B_{n+1} = B_{n+1}(0)$; cela donne la formule recherchée.

□

3.2 Des nombres premiers

Ce résultat a été indépendamment obtenu en 1840 par Karl Georg Christian von Staudt [vS40] et Thomas Clausen [Cla40] :

Théorème 3.2.1 (von Staudt–Clausen)**.** *Notons $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers. On a :*

$$\boxed{\left(B_n + \sum_{p\in\mathcal{P}, p-1|n} \frac{1}{p}\right) \in \mathbb{Z}}$$

Pour la démonstration, nous aurons besoin de ceci :

Définition 3.2.2. *Un nombre rationnel $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ est dit p-entier si son dénominateur est premier avec p.*

Démonstration.

Nous pouvons supposer que n est pair ; p dénotera un nombre premier.

Montrons par récurrence que pB_n est p-entier. Ceci est clair pour $n = 1$. Si $n \geq 2$, d'après le théorème 3.1.1, on a :

$$S_n^{p-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^k}{n+1} B_k p^{n+1-k} = pB_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{p^{n-k}}{n-k+1} pB_k \in \mathbb{Z}$$

Il suffit donc de prouver que $C_n^k \frac{p^{n-k}}{n-k+1} pB_k$ est p-entier pour $k < n$. Or, c'est bien le cas de pB_k par hypothèse de récurrence, ainsi que celui de $\frac{p^{n-k}}{n-k+1}$ étant donné que $n-k+1 \leq p^{n-k}$. Par multiplicativité, on a bien le fait que pB_n est p-entier.

Montrons que si $p-1|n$ alors $pB_n = -1 \bmod p$ et que B_n est p-entier sinon. Le théorème 3.1.1 donne, comme on sait que les pB_k sont p-entiers, $pB_n = S_n^{p-1} \bmod p$. Or, si g est un élément primitif du groupe $\mathbb{F}_p^*$, on a :

$$S_n^{p-1} = \sum_{k=1}^{p-1} k^n = \sum_{k=0}^{p-2} g^{nk} \bmod p$$

Ainsi, $(g^n-1)S_n^{p-1} = g^{n(p-1)} - 1 = 0 \bmod p$. Si $p-1|n$, alors $pB_n = S_n^{p-1} = \sum_{k=1}^{p-1} 1 = -1 \bmod p$ par le petit théorème de Fermat, sinon, $g^n \neq 1 \bmod p$ et ainsi $pB_n = S_n^{p-1} \bmod p = 0$.

Ce qui précède montre que la quantité $w = B_n + \sum_{p-1|n} \frac{1}{p}$ est q-entière quel que soit q premier.

En effet, si $p \in \mathcal{P} \setminus \{q\}$, $\frac{1}{p}$ est q-entier. Soit $q-1 \nmid n$ et on a directement le résultat ; soit $q-1|n$ et alors on a $pB_n = -1 \bmod p$ ou encore $B_n = \frac{-1}{p} \bmod 1$, dans ce cas, le terme en $\frac{1}{p}$ s'annule avec B_n, et w est q-entier

w est donc un nombre entier.

□

Ce théorème nous donne directement :

Corollaire 3.2.3. *Pour n pair, le dénominateur de B_n est le produit des nombres premiers p tels que $p-1|n$.*

Démonstration.

Il suffit d'écrire :

$$B_n = w - \sum_{p \in C} \frac{1}{p} = \frac{w \prod_{p \in C} p + \sum_{q \in C} \prod_{p \in C \setminus \{q\}} p}{\prod_{p \in C} p}$$

Où l'on a noté $C = \{p \in \mathcal{P} \mid p-1|n\}$.

Comme le dénominateur est non-nul modulo tout $p \in C$, cette écriture est la fraction réduite de B_n. CQFD

□

En particulier, pour $n \geq 3$, le dénominateur de B_n est sans facteur carré et il est divisible par 6.

Citons un résultat qui améliore légèrement le théorème précédent :

Théorème 3.2.4. *Le dénominateur de $\frac{B_n}{n}$ n'est divisible que par les nombres premiers p tels que $p-1|n$.*

Autrement dit, le dénominateur de $\frac{B_n}{n}$ est $\prod_{p \in \mathcal{P}, p-1|n} p^{1+v_p(n)}$.

3.3 Questions ouvertes

Définition 3.3.1. *Un nombre premier, p, est dit irrégulier s'il existe $n \in \{2 \dots p-3\}$ tel que p divise le numérateur de B_n et régulier sinon.*

En 1915, Johan Jensen a démontré qu'il y avait une infinité de nombres premiers irréguliers. On ne sait pas actuellement s'il existe une infinité de nombres premiers réguliers ; toutefois, il a été conjecturé :

Conjecture 3.3.2. *La densité asymptotique dans $\mathcal{P}$ des nombres premiers réguliers est de $\frac{1}{\sqrt{e}}$.*

Idée de la conjecture.

Le théorème 3.4.2 nous donne — comme $\zeta \to_\infty 1$ — un équivalent de B_{2n} lorsque n tend vers l'infini :

$$B_{2n} \sim (-1)^{n+1} \frac{2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$$

En particulier, $\left|\frac{B_{2n}}{2n}\right|$ tend vers l'infini avec n. On peut donc penser que $\left(\frac{B_n}{n} \bmod p\right)_{n \in \{2 \dots p-3\}}$ est asymptotiquement équiréparti dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

La probabilité qu'aucun élément de cette famille ne soit 0 est donc de $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{p-3}{2}}$; ce qui, lorsque p tend vers l'infini, tend vers $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

□

On relie autrement les nombres premiers aux nombres de Bernoulli :

Conjecture 3.3.3 (Agoh)**.** *p est premier si et seulement si $pB_{p-1} = -1 \bmod p$.*

Remarquons que le sens direct se déduit du théorème 3.2.1 en le spécialisant en $n = p-1$. Seul le sens indirect pose problème.

Bernd Kellner, en 2002 [Kel02], a montré son équivalence avec :

Conjecture 3.3.4 (Giuja)**.** *p est premier si et seulement si $\sum_{k=0}^{p-1} k^{p-1} = -1 \bmod p$.*

3.4 De la fonction ζ de Riemann

Définition 3.4.1. *On définit la fonction ζ de Riemann sur le demi-plan formé des nombres complexes z ayant une partie réelle strictement supérieure à 1 par :*

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

Les valeurs de la fonction ζ de Riemann en les entiers positifs pairs sont intimement liés aux nombres de Bernoulli ; comme l'a montré Leonhard Euler en 1739 [Eul68] :

Théorème 3.4.2. *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\boxed{\zeta(2p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = (2\pi)^{2p} \frac{(-1)^{p+1}}{2\,(2p)!} B_{2p}}$$

Démonstration.

Posons, pour tout n, $\widehat{B}_n(x) = \overline{B}_n\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ de telle sorte que cette fonction est 2π-périodique.

Montrons par récurrence sur n que son k-ième coefficient de Fourier est :

$$c_k^n = -\frac{n!}{(2i\pi k)^n}$$

Tout d'abord, on a facilement :

$$c_k^1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{B}_1(t)\, e^{-ikt} dt = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2i\pi kx} dx = -\frac{1}{2i\pi k}$$

Si $n \geq 1$, on peut écrire :

$$c_k^{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{B}_{n+1}(t)\, e^{-ikt} dt = \int_0^1 B_{n+1}(x)\, e^{-2i\pi kx} dx$$

Et en faisant une intégration par partie, on trouve que :

$$c_k^{n+1} = \left. B_{n+1}(x) \frac{e^{-2i\pi kx}}{-2i\pi k} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\, B_n(x) \frac{e^{-2i\pi kx}}{-2i\pi k} dx = \frac{n+1}{2i\pi k} c_k^n$$

Par récurrence, on a donc le résultat.

Si $p \geq 1$, la fonction $\widehat{B}_{2p}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le théorème de convergence normale affirme alors que la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers sa fonction ; en particulier, il y a convergence simple en $x = 0$:

$$\widehat{B}_{2p}(0) = c_0\left(\widehat{B}_{2p}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k^{2p} + c_{-k}^{2p}\right)$$

Ce qui se réécrit, connaissant les valeurs de c_k^{2p}, en :

$$B_{2p} = \widehat{B}_{2p}(0) = 2\,(-1)^{p+1}\,(2p)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^{2p}}$$

D'où le résultat.

□

3.5 Formule d'Euler–MacLaurin

Ce résultat a été indépendamment obtenu vers 1735 par Leonhard Euler et Colin MacLaurin [Mac42] :

Théorème 3.5.1 (formule d'Euler–Maclaurin)**.** *Soit* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *et soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{k+1}$ *sur l'intervalle* $[a;b]$*. On a :*

$$\boxed{\sum_{a<b\leq b} f(n) - \int_a^b f(t)\,dt = \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}}{(r+1)!} \left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\right) + R}$$

$$\text{où } R = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b \overline{B}_{k+1}(t)\, f^{(k+1)}(t)\,dt$$

Démonstration.

Montrons le cas $k = 0$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt &= \left.\left(t-n+\frac{1}{2}\right) f(t)\right]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n}\left(t-n+\frac{1}{2}\right) f'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(f(n)+f(n-1)\right) - \int_{n-1}^{n} \overline{B}_1(t)\, f'(t)\,dt\end{aligned}$$

Et on obtient la formule d'Euler–Maclaurin pour $k = 0$ en sommant cette expression pour $n \in \{a+1, a+2, \ldots, b\}$.

Faisons une récurrence pour montrer le résultat pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons-le donc vrai pour $k-1$. Alors, faisons une intégration par partie sur R en utilisant la proposition 2.2.2 :

$$\int_a^b \overline{B}_k(t)\, f^{(k)}(t)\,dt = \left.\frac{\overline{B}_{k+1}(t)}{k+1} f^{(k)}(t)\right]_a^b + \frac{-1}{k+1}\int_a^b \overline{B}_{k+1}(t)\, f^{(k+1)}(t)\,dt$$

Et il suffit d'utiliser le fait que $\overline{B}_{k+1}(t) = B_{k+1}$ quel que soit $t \in \mathbb{Z}$ pour remplacer ceci dans la formule de récurrence et en déduire le résultat.

□

Et on a la majoration suivante :

$$|R| \leq \frac{2}{(2\pi)^{k-1}} \int_0^n \left|f^{(k+1)}(x)\right| dx$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit de majorer $\overline{B}_n$. Cela peut se faire en utilisant ses coefficients de Fourier.

*

* *