2.3

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs…) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examinateur.

L’arithmétique des nœuds

À partir de caractéristiques géométriques, on classe les nœuds, on les combine pour former de nouveaux nœuds, on définit des nœuds premiers et on montre que tout nœud est décomposable en une série finie de nœuds premiers.

Les livres d’histoire antique rapportent la légende du roi Alexandre de Macédoine (356-323 av. J.-C.). Selon la fable, durant sa campagne victorieuse en Asie Mineure, le roi macédonien Alexandre traversa une ville perse et vit dans un temple une des curiosités de la Perse de cette époque, un nœud noué par un sage de la ville de Gordion ; d’après la tradition, celui qui déferait le nœud, deviendrait Empereur de l’Asie. Le jeune roi trancha le nœud d’un coup d’épée.

Faut-il admirer l’esprit de décision d’Alexandre ou regretter qu’un tel coup d’épée l’ait privé de l’honneur de fonder la théorie des nœuds? Même si Alexandre connaissait bien les mathématiques de l’Antiquité (son maître était Aristote), il aurait été surpris d’apprendre que le problème qu’il avait ainsi résolu de manière impériale, était un problème de mathématique. Et cela d’autant plus que la solution de ce problème n’a été trouvée qu’à notre époque, au moyen d’une méthode permettant de déterminer par inspection, ou d’après la description du nœud, s’il peut être dénoué ou non.

La théorie mathématique des nœuds, née il y a 100 ans environ, a été clarifiée par les travaux et les résultats obtenus dans un domaine important des mathématiques, la topologie.

Un échantillon de nœuds

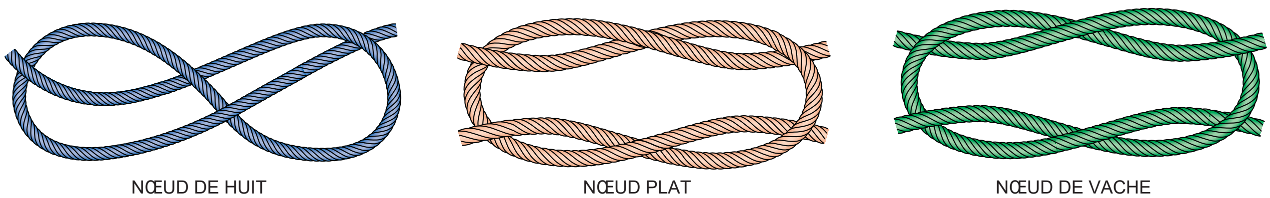
Nous allons traiter ici de quelques-unes des découvertes de cette belle théorie et de certains de ses problèmes. Nous conseillons vivement au lecteur de se munir d’un bout de ficelle assez long pour vérifier «avec les mains» *(stricto sensu)* les affirmations du texte. Nous commençons notre étude des nœuds par les nœuds marins, dessinés sur la figure 1. Sur cette figure, les extrémités des nœuds sont libres pour pouvoir être attachées, aux mâts par exemple. Cependant, pour étudier mathématiquement les nœuds, il est plus commode de convenir que les extrémités libres sont attachées deux à deux ; après une telle opération, les nœuds qui nous sont familiers, avec deux ou plus de deux extrémités libres, se transforment en courbes fermées *(voir la figure 2)*. Le nœud plat et le nœud de vache, qui ont quatre bouts libres sur la figure 1, ont chacun deux représentations différentes, suivant la manière dont on relie les bouts libres : l’une des deux contient deux boucles, et constitue un nœud emboîté. D’autres exemples de nœuds emboîtés sont représentés sur la figure 3.

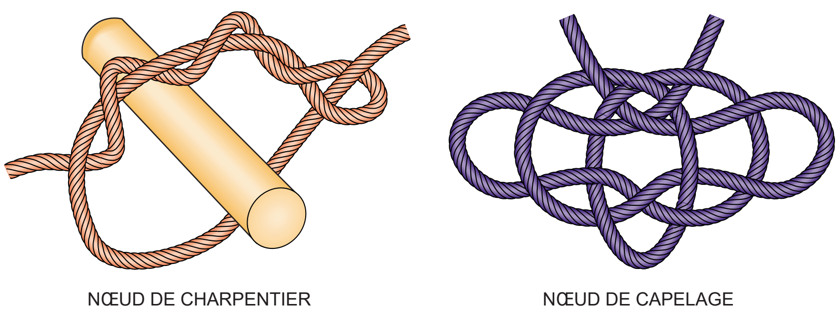
Nos premières réflexions nous conduisent aux définitions suivantes :

Un nœud est une courbe fermée de l’espace, sans points d’intersection.

Un nœud emboîté est la réunion de deux ou plusieurs courbes fermées de l’espace sans points d’intersection deux à deux ou entre elles-mêmes.

La théorie des nœuds étudie à la fois les nœuds simples et les nœuds emboîtés, mais nous ne considérerons pas ici les nœuds emboîtés. La figure 4 complète notre catalogue de nœuds par de





1. Ces nœuds sont familiers aux marins et aux amateurs de casse-tête. Ils constituaient autrefois d’amusantes distractions sans qu’une théorie mathématique puisse en décrire les caractéristiques fondamentales. Le nœud de capelage *(en bas à droite)* semble le plus compliqué, alors que c’est en fait le plus simple, puisqu’on le dénoue facilement en faisant glisser les brins de corde les uns sur les autres sans toucher aux deux extrémités.

nouvelles images accompagnées de leurs variantes mathématiques.

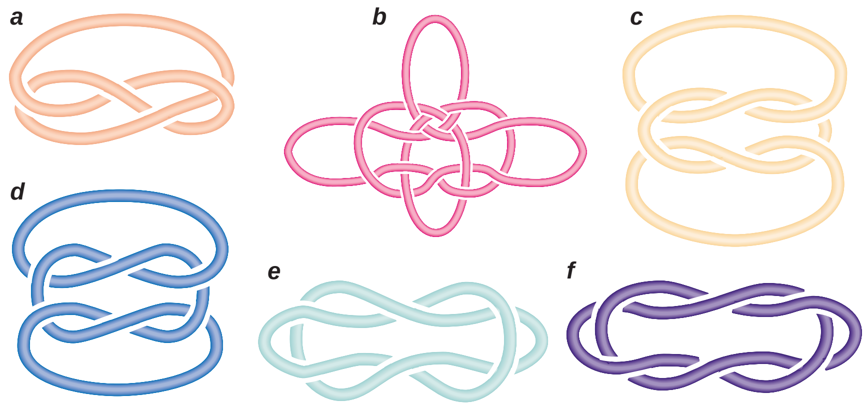
Sur tous les dessins des nœuds (c'est-à-dire leur projection sur un plan) que nous avons considérés, il apparaît des points particuliers, où se croisent des morceaux de la courbe qui représente le nœud. Ces points sont des *points de croisement*. Sur la figure 2, seulement deux brins se rencontrent aux points de croisement : ce n'est pas un hasard, car on peut toujours éliminer les points de croisement à trois brins ou plus, ainsi que les autres irrégularités de la représentation du nœud, en choisissant une perspective convenable d'où dessiner le nœud. En règle générale, un nœud n'est pas modifié quand on déplace «légèrement» les brins pour éviter, par exemple, que trois brins ne se croisent en un même point.

On appelle diagramme d'un nœud toute représentation plane où les seuls points de croisement sont à deux brins, et où l'on indique, pour chaque point de croisement sur le diagramme, quel brin passe «au-dessus» et quel brin passe «en dessous» (habituellement on interrompt le brin qui passe en dessous).

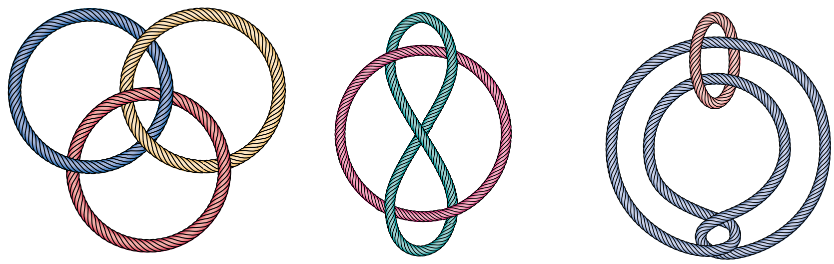
Nœuds triviaux et nœuds «bizarres»

L'expérience nous apprend qu'on peut défaire n'importe quel nœud, aussi compliqué soit-il, à condition d'être assez patient. Mais attention! Pour défaire le nœud, on le manipule d'habitude par ses extrémités libres. Nos nœuds mathématiques n'ont pas d'extrémités et il faut nous attendre à ce que, sans défaire la ficelle avec laquelle le nœud est «noué», nous ne puissions pas dénouer la plupart des nœuds que nous avons examinés. Il devient alors naturel de considérer la circonférence comme le nœud le plus simple, le plus «dénoué» ; on l'appelle le nœud trivial. Quand on considère le nœud marin de capelage, on remarque qu'il se dénoue facilement dès que ses boucles n'entourent aucun mât. De même, nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que la représentation mathématique du nœud de capelage *(voir la figure 2b)* est facilement transformée en une circonférence. Les nœuds de ce type, qui peuvent être ainsi dénoués, s'appellent nœuds de type trivial ou simplement nœuds triviaux.

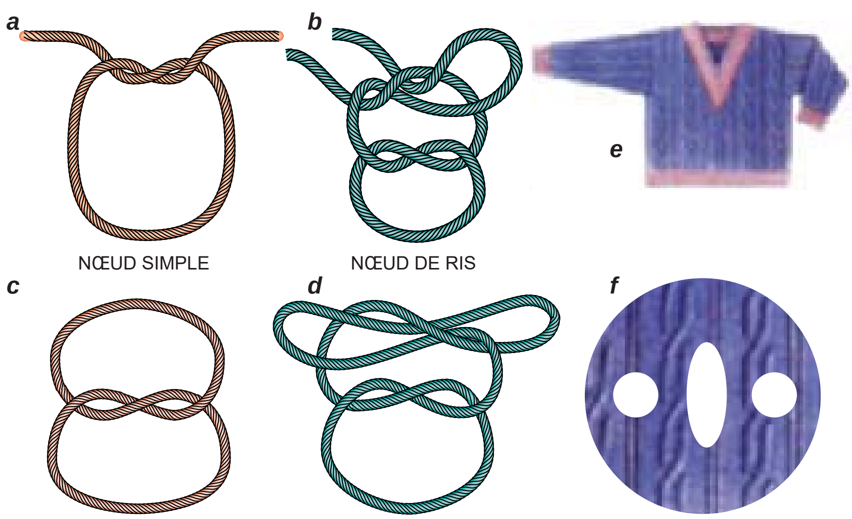
Les prestidigitateurs, les enfants et les Esquimaux, qui utilisent des boucles de corde, ont une grande expérience de ces nœuds triviaux (mais souvent com-



2. La représentation mathématique des nœuds s'obtient en réunissant les extrémités libres des nœuds pour créer une ou plusieurs courbes fermées. Quand le nœud ne comporte qu'un seul brin *(a, b, c et d)*, on dit que c'est un nœud simple. Lorsque le nœud comprend plusieurs courbes fermées *(e et f)*, c'est un nœud emboîté. À un nœud de vache ou à un nœud plat correspondent plusieurs types de représentations selon la façon dont on relie les extrémités : au nœud plat correspondent les nœuds *c* et *e*, au nœud de vache, les nœuds *d* et *f*.



3. Les nœuds emboîtés comportent plusieurs courbes fermées. Le nœud de Borromée *(à gauche)* est le plus connu puisqu'il figure sur les armoiries d'une famille italienne, les Borromée. Ce nœud symbolisait la cohésion des trois branches de la famille : si l'on coupe un des trois anneaux, les deux autres se détachent. Le psychanalyste Jacques Lacan utilisait ce nœud pour exprimer l'indissociabilité du réel, du symbolique et de l'imaginaire.



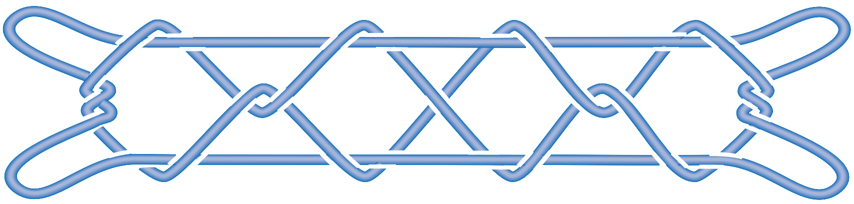
4. Nœuds et tricot. Le nœud droit le plus simple *(a)* et sa représentation mathématique *(c)*, le nœud de trèfle, servent de base à la confection de certains tricots. Dans le nœud de ris *(b)*, on insère des boucles successives l'une à l'intérieur de l'autre pour réaliser un tricot qui est toujours un nœud assez simple puisqu'il suffit de tirer sur un brin pour le défaire quasi entièrement. Le mathématicien tricoteur sait que les propriétés topologiques de son tricot sont équivalentes à un nœud entourant trois ouvertures et limité par une courbe fermée. La représentation mathématique du nœud de ris *(d)* montre que ce nœud est équivalent au nœud de trèfle *(c)*.

pliqués!). Sur la figure 5, on a représenté l'un de ces nœuds, appelé «échelle de Jacob». Ainsi le nœud de capelage, l'échelle de Jacob et la circonférence ne sont qu'un seul et même nœud sous des aspects différents. Y a-t-il d'autres types de nœuds? Comment les distinguer?

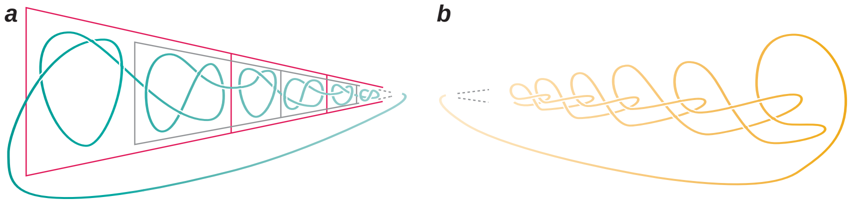
Avant de partir en mer, le marin vérifie son bateau. Avant de nous aventurer dans le royaume des nœuds, examinons à nouveau notre définition. Peut-on considérer que les courbes fermées infinies, représentées sur la figure 6, sont des nœuds? S'agit-il même de courbes? Sans entrer dans les détails mathématiques rigoureux, nous faisons confiance aux mathématiciens et nous acceptons que ces constructions bizarres aient le droit de s'appeler des courbes et même des nœuds. Mais ce sont des nœuds «bizarres», à la différence des nœuds «artisanaux» qu'on fabrique avec de la ficelle. Ils peuvent avoir des propriétés inattendues ; ainsi le nœud 6*b* peut être dénoué, mais seulement après un nombre infini d'opérations successives : on commence par sortir la première boucle de la deuxième, puis la deuxième boucle de la troisième et ainsi de suite. On ne peut pas «dénouer ce nœud» dans le sens habituel de cette expression.

Différents types de nœuds

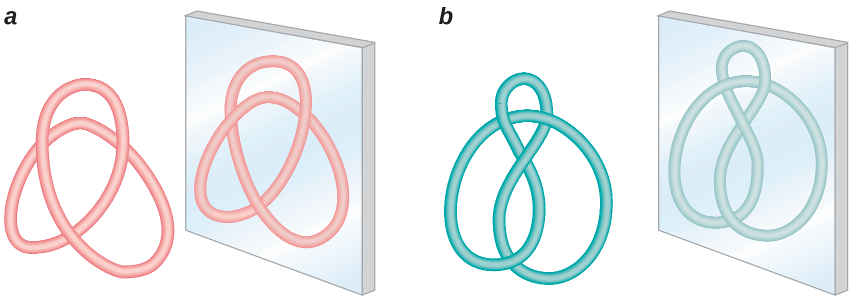
Nous voudrions que notre théorie de l'équivalence mathématique des nœuds préserve l'idée naïve que nous avons de nœuds «semblables». Il existe deux définitions du type d'un nœud. Selon la première définition, on dit que deux nœuds sont *isotopes* ou qu'ils ont le même type d'isotopie, si l'on peut passer d'un nœud à l'autre sans couper de brins, par des manipulations consistant à faire passer les boucles l'une dans l'autre ou l'une sur l'autre. En pratique, on vérifie que deux nœuds sont isotopes soit à l'aide d'une ficelle, soit au moyen d'une série de dessins. Par exemple, nous savons déjà que le nœud de capelage est isotope à l'«échelle de Jacob» et tous deux sont isotopes à la circonférence. Autre exemple, le nœud simple *(voir la figure 4a)* est isotope au nœud de trèfle *(voir la figure 7a)*, qui est le nœud le plus simple après la circonférence ; on l'appelle ainsi à cause de sa ressemblance avec le contour d'une feuille de trèfle. Les enfants savent démontrer (en tirant sur leurs lacets!) que le nœud de ruban ou rosette ou encore nœud de ris *(voir la figure 4b)*, le double nœud de ruban et le nœud de



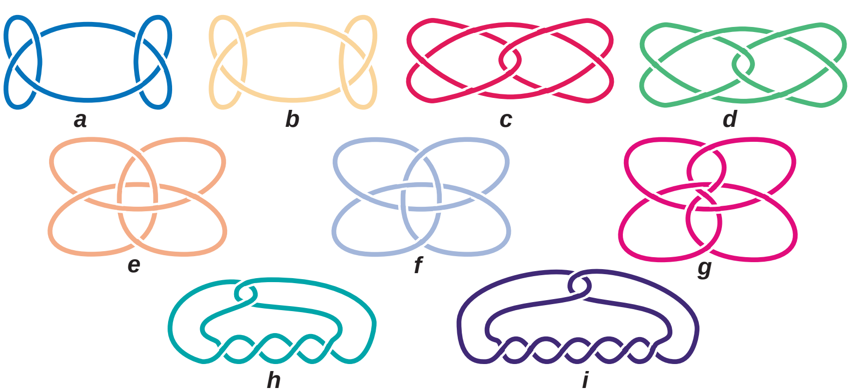
5. L'échelle de Jacob. On la réalise en faisant passer une boucle de corde entre quatre doigts et en attrapant des brins libres entre les autres doigts. Elle est équivalente au nœud trivial en boucle.



6. Une suite infinie de nœuds est considérée par les mathématiciens comme un nœud unique. Pour démontrer *(a)* que la composition de deux nœuds ne peut donner le nœud trivial *E*, on commence par supposer le contraire. En associant les nœuds d'une première façon *(rectangles rouges)*, puis d'une deuxième façon *(rectangles gris)*, on montre que le nœud *A* doit être le nœud trivial, et que le nœud *B* l'est aussi : la composition de deux nœuds ne peut être dénouée pour donner le nœud trivial que si les deux nœuds sont triviaux. La chaînette infinie *(b)* peut être dénouée après un nombre infini d'opérations en faisant glisser la première boucle à travers la deuxième boucle, puis la deuxième boucle à travers la troisième boucle, etc.



7. Un nœud n'est pas toujours isotope à son image dans un miroir. Le nœud de trèfle *(à gauche)* n'est pas isotope à son image, car on ne peut faire coulisser les brins de façon à transformer un nœud de trèfle en nœud image. En revanche, le nœud en huit *(à droite)* est isotope à son image : on dit que c'est un nœud réflexif. Deux nœuds sont équivalents s'ils sont isotopes ou si l'un est isotope à l'image de l'autre dans un miroir.



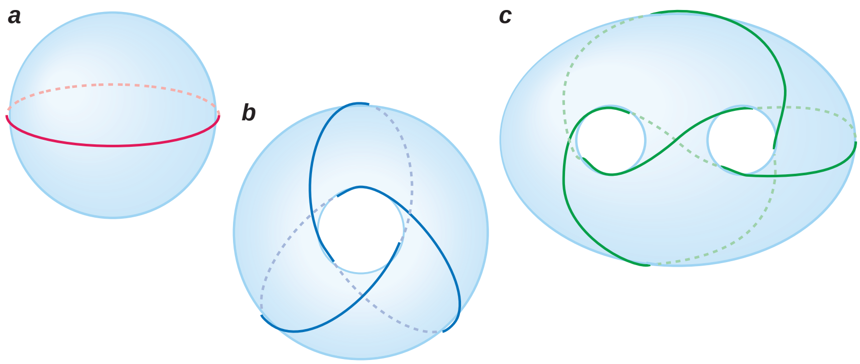
8. Neuf autres spécimens de notre liste de nœuds. Les nœuds *a* et *b* résultent de la composition de deux nœuds de trèfle identiques, ou images dans un miroir ; ils ne sont ni isotopes ni équivalents, ce qui illustre les précautions à prendre pour classifier les nœuds. De même, les nœuds *c* et *d*, les nœuds *e*, *f* et *g* et les nœuds *h* et *i* ne sont pas équivalents bien qu'ils se «ressemblent» beaucoup.

trèfle sont isotopes. À titre de curiosité, le lecteur pourra montrer que le nœud plat *(2c)* est isotope au nœud carré *(8a)* et que le nœud de vache *(2d)* est isotope au nœud de grand-mère *(8b)*.

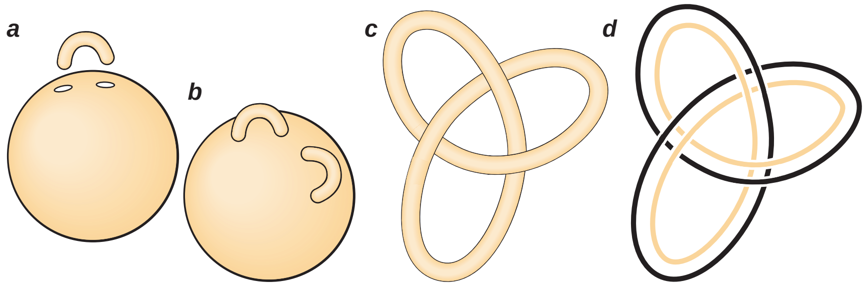
La seconde définition du type d'un nœud est plus large que la première : on dit que deux nœuds sont équivalents, ou qu'ils ont le même type, s'ils sont isotopes ou si l'un est isotope à l'image de l'autre dans un miroir. D'après cette définition, chaque nœud est équivalent à son image dans un miroir. Certains nœuds, appelés nœuds réflexifs, sont isotopes à leur image dans un miroir. C'est le cas du nœud en huit *(voir la figure 7)* : par une manipulation simple, on transforme le nœud en huit «tourné à gauche» en un nœud en huit «tourné à droite». Existe-t-il des nœuds non réflexifs? Oui : en 1914, le mathématicien allemand Dehn (l'un des fondateurs de la théorie des nœuds) démontra que le nœud de trèfle n'était pas réflexif. En d'autres termes, des nœuds équivalents ne sont pas toujours isotopes alors que des nœuds isotopes sont par définition équivalents. Certains nœuds ne sont ni isotopes, ni équivalents, notamment lorsqu'ils résultent de la composition d'un nœud non réflexif avec son image dans un miroir *(voir la figure 8)*.

Le nombre minimal de croisements

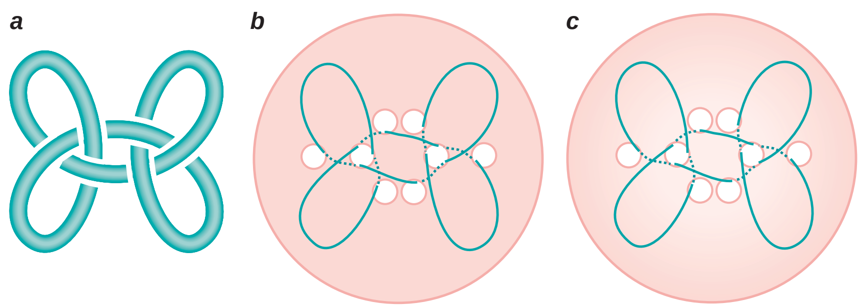
Quels indices distinguent-ils deux nœuds? Peu d'indices ont trait aux caractères apparents des nœuds, c'est-à-dire au fait qu'ils se ressemblent ou qu'ils ne se ressemblent pas : même des nœuds aussi simples que le nœud de trèfle et le nœud en huit peuvent être représentés et noués de plusieurs manières (nous avons déjà fait correspondre le nœud 7*a* aux nœuds 2*a*, 4*a*, 4*b*, 4*c* et 4*d*). Seules nous importent les propriétés des nœuds qui ne dépendent pas de la manière dont ils sont réalisés ou dessinés et qui sont identiques pour tous les nœuds du même type. De telles propriétés s'appellent *invariants d'un nœud*. L'invariant le plus étudié et le plus commode des invariants algébriques d'un nœud est le groupe du nœud (voir *La description algébrique des nœuds*, par Lee Neuwirth, dans ce dossier). En utilisant le groupe du nœud, on montre souvent qu'un nœud n'est pas trivial ou que deux nœuds ne sont pas équivalents ; malheureusement, deux nœuds correspondant au même groupe ne sont pas équivalents!



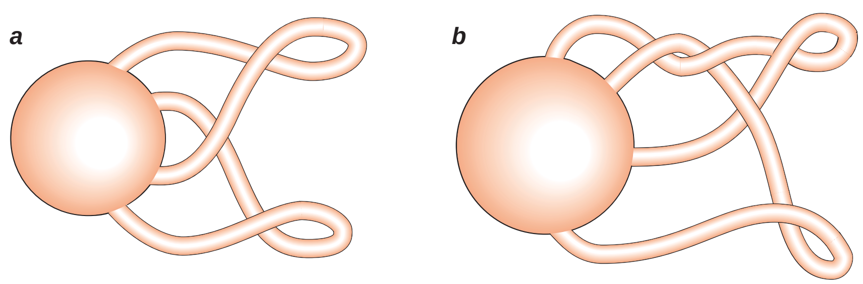
9. L'invariant «gourmand» d'un nœud est égal au nombre minimal d'anses non entrelacées qu'il faut ajouter à une sphère pour pouvoir dessiner le nœud sans qu'il y ait de point de croisement. Le tore *(b)* est topologiquement identique à une sphère à laquelle on a ajouté une anse et le bretzel *(c)* est identique à une sphère à laquelle on a ajouté deux anses. Sur la surface de la sphère, on ne peut dessiner sans point de croisement que le nœud trivial (la boucle). Sur le tore, on dessine le nœud de trèfle et sur le bretzel, le nœud en huit.



10. Tore et bretzel sont équivalents à une sphère où l'on ajoute une anse *(a)* ou deux anses *(b)*. En insufflant de l'air à l'intérieur du nœud, on obtient une sphère généralisée *(c)* dont les anses sont entrelacées. Cependant, si on coupe la surface de cette sphère par un nœud de trèfle dessiné sur sa surface *(d)*, elle ne se sépare pas en deux parties. Cette surface, aisément construite, ne peut servir à définir le genre du nœud.



11. Construction d'une surface percée de trous, telle qu'on puisse y inscrire un nœud sans que les brins ne se coupent.



12. Nœud de trèfle et nœud en huit formant le contour d'une surface. Ces contours séparent chacune des surfaces correspondantes en deux parties. Ces deux nœuds sont de même genre, égal à un : on peut les dessiner sur la surface d'une sphère à deux anses, et celle-ci se sépare en deux parties quand on la découpe selon la courbe du nœud.

Pour classer un nœud, il est intéressant de connaître les invariants numériques les plus simples, parmi eux *le nombre minimal de croisements* et le *genre* du nœud. Pour des nœuds simples, la valeur de ces invariants se calcule directement à partir du dessin du nœud. Ainsi, parmi tous les diagrammes représentant le nœud de capelage, nous choisissons celui pour lequel le nombre de croisements est minimal. Il est toutefois difficile de montrer que la valeur obtenue ne peut être réduite à une valeur plus faible et que c'est la valeur irréductible de l'invariant du nœud. C'est le problème que nous allons aborder à l'aide de divers systèmes de classification des nœuds.

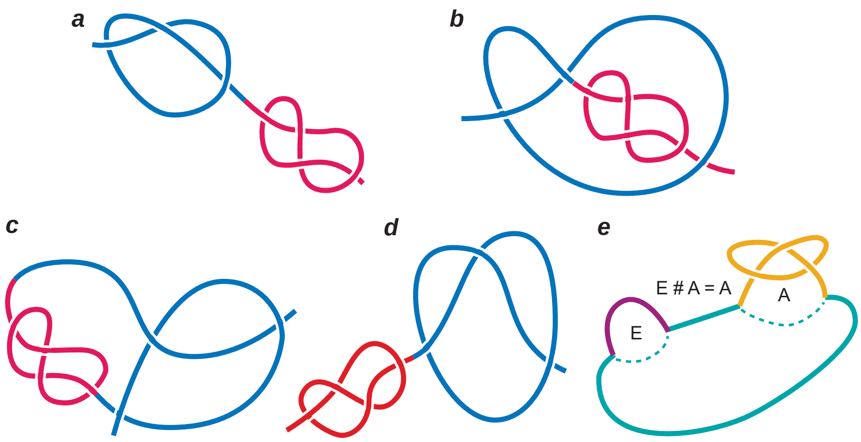
Le nombre minimal de croisements du nœud *B* est noté *M(B)*. De manière générale, on montre, d'une part, que *M(B)* = 0 si et seulement si le nœud *B* est trivial et, d'autre part, qu'il n'existe pas de nœuds *B* pour lesquels *M(B)* = 1 ou 2 ; on a mentionné précédemment, sans le démontrer, que le cercle, le nœud de trèfle et le nœud en huit ne sont pas équivalents. En utilisant cette propriété, on peut montrer que les égalités *M(B)* = 3 et *M(B')* = 4 sont vérifiées si (et seulement si) *B* est équivalent au nœud de trèfle et *B'* est équivalent au nœud de huit. On obtient ainsi, grâce au nombre minimal de croisements, une première description complète des nœuds dont le nombre minimal de croisements est inférieur ou égal à 4.

L'«invariant gourmand» du nœud

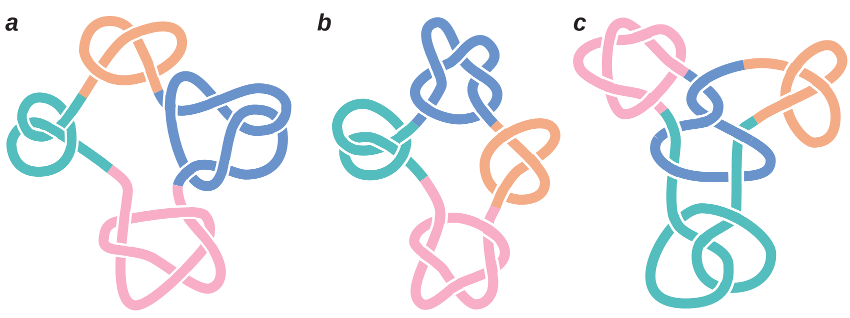
Afin de définir le deuxième invariant de nœud, le genre, nous allons maintenant associer à un nœud une surface telle qu'on puisse dessiner le nœud sur cette surface sans qu'il apparaisse de points de croisement. Seul le nœud trivial, c'est-à-dire la circonférence, peut être dessiné sur une sphère sans qu'il y subsiste de points de croisement ; le nœud de trèfle peut être dessiné sur une surface torique (la surface d'une chambre à air) et pour le nœud en huit, il faut une surface ressemblant à un bretzel *(voir la figure 9)*. On obtient le tore et le bretzel à partir d'une sphère souple en ajoutant des «anses» *(voir la figure 10)*. Le mathématicien ne distingue pas deux surfaces qui peuvent être déformées (comme des surfaces élastiques) pour être amenées en coïncidence, tels le tore classique et la sphère généralisée avec une anse.

Étant donné un nœud *A*, on lui associe un autre invariant numérique *G(A)* ; c'est le nombre minimal d'anses qu'il faut ajouter à une sphère pour qu'on puisse disposer le nœud *A* sur la surface obtenue sans qu'il n'y ait de points de croisement. Les nœuds *A*, tel que le nœud de trèfle, pour lesquels *G(A)* est égal à 1, s'appellent nœuds toriques. À titre d'exercice, on peut construire les nœuds toriques *B* (qu'on peut dessiner sur un tore) dont le nombre minimal de croisements vaut 3,5 ou 7 (*M(B)* = 3,5 ou 7).

Le nombre *G(A)* n'a pas de nom défini. Nous l'appellerons l'«invariant gourmand» du nœud *A*. Pour que la définition de cet invariant soit tout à fait correcte, il faut montrer que pour tout nœud *A* il existe au moins une sphère avec des anses sur laquelle on peut mettre le nœud sans qu'il présente de croisements : la figure 11 montre comment on construit une telle sphère généralisée à partir du dessin d'un nœud.



13. La composition de deux nœuds est commutative : le nœud *A* composé avec le nœud *B* donne un nœud équivalent au nœud *B* composé avec le nœud *A* puisqu'il est possible de faire coulisser le second nœud à travers le premier et inverser leur ordre. La composition du nœud *A* avec le nœud trivial *E* est un cas particulier : elle est commutative puisqu'on peut ajouter une boucle n'importe où sur n'importe quel nœud *(a)*.



14. La commutativité de la composition de nœuds aide à montrer l'équivalence de ces trois nœuds : ils sont formés de quatre nœuds élémentaires, composés dans trois ordres différents.

Le genre d'un nœud

Pour simplifier la dernière définition de l'invariant gourmand, nous commencerons par une remarque assez simple : le brin ou la courbe qui constitue un nœud peut être considéré comme un volume qu'on peut dilater en soufflant dedans *(voir la figure 10)*. On obtient ainsi une sphère généralisée (*avec des anses*) dont les anses peuvent être entrelacées. Pour définir sans ambiguïté l'invariant gourmand d'un nœud, il faut exiger que les anses de la sphère ne soient pas entrelacées, c'est-à-dire qu'il y ait peu d'anses, qu'elles soient dispersées sur la surface de la sphère, éloignées les unes des autres et en forme de «croissants» comme sur le dessin 10*b*.

Au contraire, pour définir sans doute le plus utile des invariants numériques, on considère toutes les sphères auxquelles on a ajouté des anses de manière arbitraire (elles peuvent être entrelacées, liées, accouplées) ; la seule restriction concerne la manière de disposer le nœud sur la surface obtenue : on exige que, si l'on coupe la surface le long du nœud, cette surface se sépare exactement en deux parties. Par exemple, il est bien évident que si l'on coupe le tore ou le bretzel de la figure 9 le long de la ficelle, on obtient un seul morceau de surface (vérifiez-le!). En revanche, si l'on coupe selon les nœuds figurés par les contours extérieurs des surfaces les sphères généralisées de la figure 12, chacune de ces sphères se sépare en deux parties : on a le même type de surface au-dessus du contour et en dessous. Les «contours apparents» des figures 12*a* et 12*b* sont équivalents aux nœuds de trèfle et de huit. Par définition, le genre *g(A)* du nœud *A* est égal à la moitié du nombre minimal d'anses qu'il faut ajouter à la sphère pour pouvoir placer le nœud *A*, de manière à réaliser cette séparation de la surface en deux parties. Les deux sphères généralisées de la figure 12 ont deux anses, entrelacées dans le cas du nœud en huit : le genre de ces deux nœuds est égal à 1.

Pour que notre définition du genre soit bonne, il faut encore montrer qu'on peut toujours trouver une sphère et des anses sur lesquelles on peut placer un nœud donné *A* en réalisant la condition de séparation précédente. Sur la figure 16, nous avons montré comment, à partir du nœud de trèfle, on peut construire une surface délimitée par le contour de ce nœud. De plus, si l'on veut que le genre soit un nombre entier, cette définition exige que le nombre minimal d'anses soit toujours pair. Nous reviendrons sur ces questions plus tard, lorsque nous démontrerons la propriété la plus remarquable du genre *g(A)* d'un nœud.

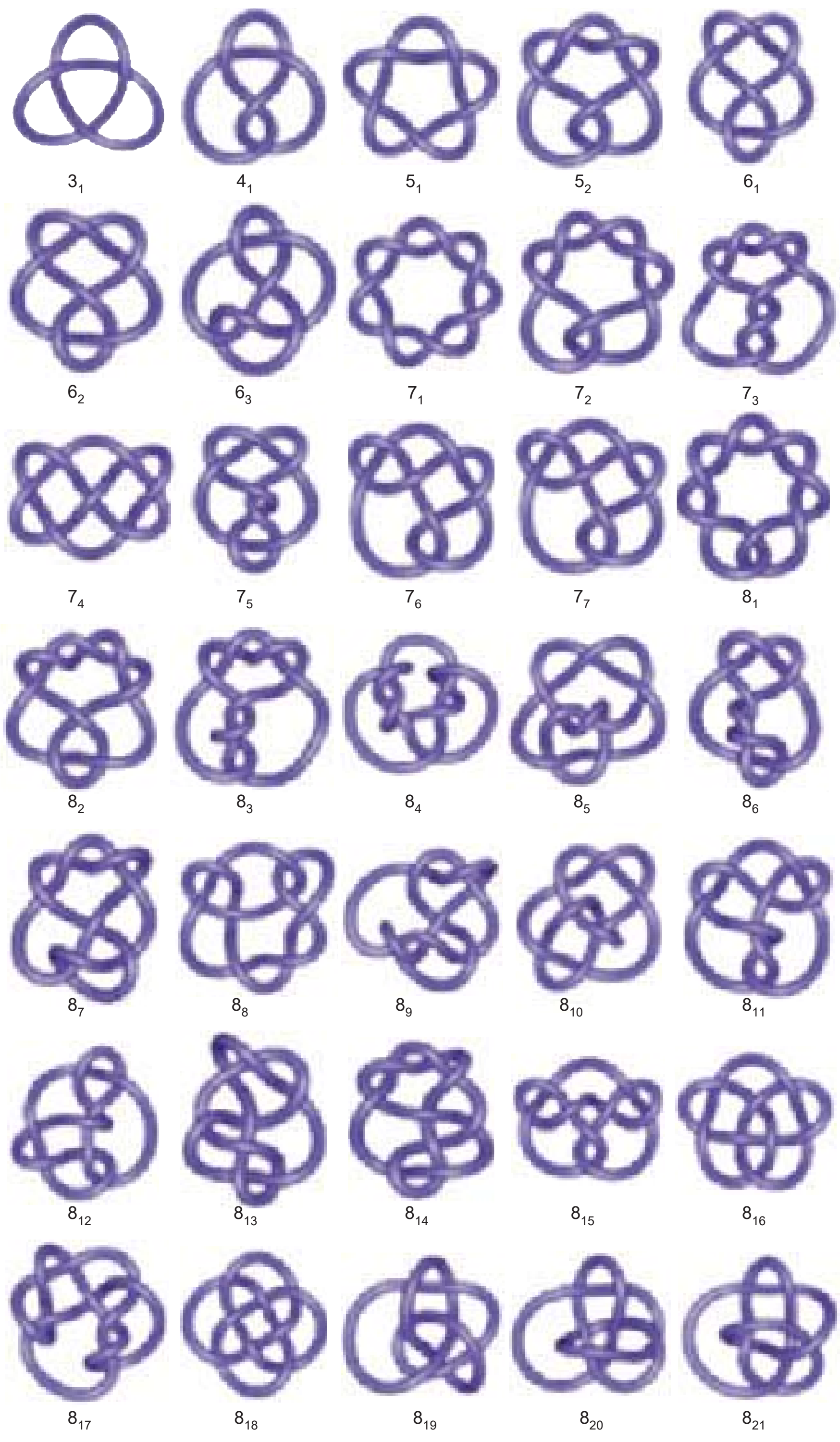
Un peu d'arithmétique

Lorsqu'une ficelle porte deux nœuds l'un à côté de l'autre, le nœud obtenu s'appelle *nœud produit* ou *nœud composé* des deux premiers. L'opération qui consiste à composer les nœuds ressemble beaucoup à la multiplication des nombres entiers. Pour composer les nœuds, il faut ouvrir les deux nœuds et joindre les bouts libres. Dans la multiplication des nœuds, le rôle de l'unité est rempli bien évidemment par le nœud trivial, la circonférence. En notant *E* le nœud trivial et *A* # *B* le composé des nœuds *A* et *B*, on a :

$$A = E \# A = A \# E.$$

La composition est commutative : $A \# B = B \# A$. Cette propriété se démontre facilement, en faisant passer le long de la ficelle un nœud «à travers» l'autre *(voir la figure 13)*. La commutativité est commode pour démontrer que des nœuds sont isotopes ; par exemple, les nœuds de la figure 14 sont isotopes car… mais il est préférable que chacun vérifie cette propriété.

On dit que le nœud *B* divise le nœud *A*, s'il existe un nœud *C* tel que $A = B \# C$. Comme le nombre 1, le nœud trivial ne peut être divisé que par lui-même. De plus, on ne peut pas défaire un nœud non trivial en le composant avec un autre nœud. Cette affirmation paraît évidente à première vue. Elle exige cependant une démonstration. Voici l'idée d'une démonstration possible (qui demanderait des justifications



15. Table des 21 premiers «nœuds premiers» qui ne sont divisibles que par eux-mêmes et le nœud trivial. Chacun de ces nœuds premiers est identifié par son nombre de croisements *(chiffre principal)* et la valeur associée de l'invariant gourmand *(chiffre inférieur)*.

mathématiques) qui utilise des suites infinies de nœuds. Supposons que $A \# B = E$. Nous allons démontrer que c'est impossible sauf si A et B sont les nœuds triviaux. Composons une infinité de couples (A, B) : nous obtenons le nœud bizarre de la figure 6*a*. Il se défait facilement : à l'intérieur de chaque rectangle rouge, on a : $Ak = A$, $Bk = B$ et on a supposé que $A \# B = E$. Mais si on dénoue ce nœud d'une autre manière, en isolant A_1 et en prenant les rectangles bleus : (B_1, A_2) (B_2, A_3), … le résultat final de l'opération laisse le premier nœud inchangé et, par conséquent, $A_1 = A = E$; on en déduit immédiatement que $B = E$. On dit que le nœud A est un nœud premier s'il n'est pas trivial et s'il ne peut être divisé que par le nœud trivial (ou un nœud qui lui est isotope).

Tout comme il existe une infinité de nombres premiers, il existe une infinité de nœuds premiers. L'arithmétique des nœuds est ainsi semblable à celle à laquelle nous sommes habitués. Tout nœud peut être décomposé en un nombre fini de nœuds premiers et cette décomposition est unique. Ces deux propriétés (nombre infini de nœuds premiers et décomposition unique) ont été démontrées en 1949 à l'aide de la notion de genre. Nous examinerons dans le paragraphe suivant la décomposition d'un nœud en produit de nœuds premiers sans vérifier toutefois l'unicité de la représentation.

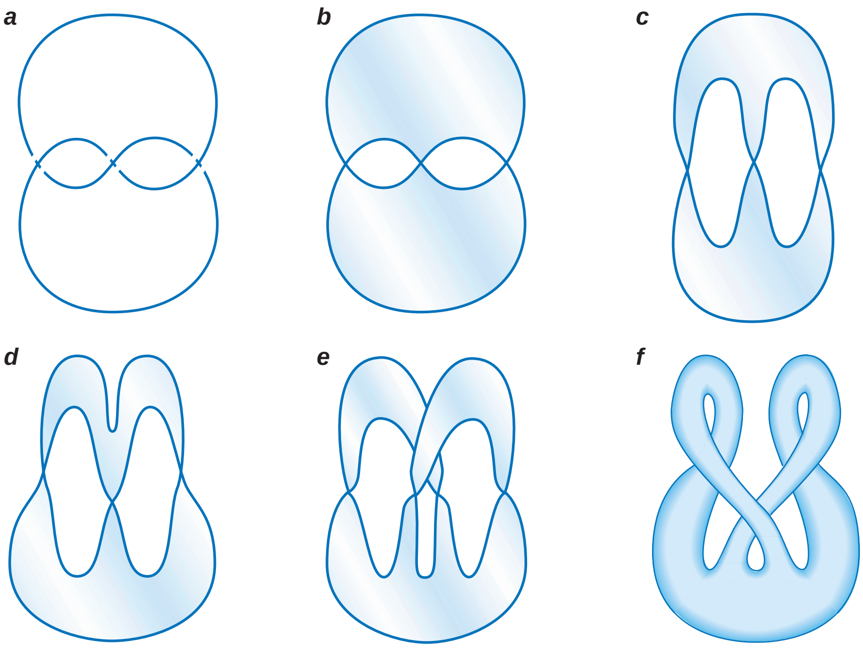
Les nœuds premiers

Les nœuds les plus simples furent d'abord mis en évidence puis étudiés systématiquement. Il fallut ensuite plus de 20 ans pour démontrer l'existence des nœuds premiers ; en 1926, les mathématiciens Alexander (l'un des fondateurs de la théorie des nœuds) et Briggs, publièrent un tableau de diagrammes de nœuds (on ne les appelait pas encore «premiers») qui était l'analogue du tableau des nombres premiers *(voir la figure 15)*. Dans le tableau, la place d'un nœud est déterminée d'abord par son nombre minimal de croisements M ; parmi les nœuds ayant le même nombre minimal de croisements, on considère ensuite l'«invariant gourmand», que l'on place en indice. Par exemple, le nœud de trèfle est désigné par 3_1. À titre d'exercice, le lecteur pourra s'amuser à trouver tous les nœuds premiers des dessins 2 à 8 et leurs diagrammes dans le tableau de la figure 15.

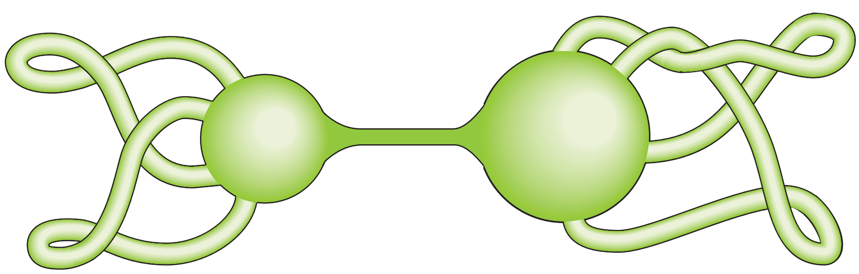
La démonstration de l'existence de nœuds premiers, comme celle de la décomposition d'un nœud non trivial en un nombre fini de nœuds premiers, repose sur la même propriété remarquable du genre d'un nœud : le genre du composé de deux nœuds est égal à la somme des genres respectifs des deux nœuds, soit $g(A \# B) = g(A) + g(B)$.

Donnons deux exemples d'application de cette propriété qui sera démontrée plus loin :

1. Soit A un nœud non trivial. S'il est premier, on a ainsi à la fois trouvé un nœud premier et montré que A se décompose suivant des nœuds premiers ($A = A$). Sinon A est le composé de deux nœuds B et C, pour lesquels on peut recommencer



16. Inscription d'un nœud sur une surface de façon que le nœud apparaisse sur le contour de cette surface et donc qu'il la sépare en deux parties quand on la découpe selon ce contour. Le nombre d'anses de cette surface définit le genre du nœud. Pour construire cette surface, par exemple celle correspondant au nœud de trèfle, on part du dessin de ce nœud *(a)* et on remplit «l'intérieur» du nœud par une surface dont les contours sont constitués par le dessin du nœud *(b)*. On peut imaginer que cette surface est celle réalisée par une bulle de savon s'appuyant sur la courbe fermée constituant le nœud ; on déforme cette surface en ovalisant les trous pour donner la surface *(c)*. On commence ensuite à entailler la surface, comme représenté sur la partie supérieure de la surface *(d)*. Quand cette rainure traverse la torsade centrale, on obtient la figure *(e)*. On peut se persuader, à l'aide d'une languette de papier, que deux torsades se combinent pour donner une boucle et, par conséquent, on obtient la surface *(f)*. En insufflant de l'air entre les deux faces de cette surface, on obtient un volume dont le contour est le nœud de trèfle, dont le genre est égal à un, puisque la sphère généralisée obtenue a deux anses.



17. Le genre d'un nœud composé est inférieur ou égal à la somme du genre du nœud A *(contour de la sphère généralisée de gauche)* et du genre du nœud B *(contour de la sphère généralisée de droite)*. En effet, la sphère généralisée, obtenue en réunissant les contours comme indiqué sur cette figure, est bien séparée en deux par le contour constituant le nœud composé. Ceci ne prouve cependant pas encore que le nombre d'anses de la sphère est le nombre minimal correspondant au nœud composé ainsi obtenu et que, par conséquent, le genre du nœud est une propriété additive stricte.

le raisonnement. Avec $(g(A) - 1)$ étapes au plus, on termine la décomposition de A, puisque chacun des nœuds obtenus a un genre au moins égal à un et que la somme des genres vaut $g(A)$.

2. Voici une autre démonstration très rapide de la propriété «on ne peut pas dénouer un nœud non trivial en le composant avec un autre nœud» : en partant de l'hypothèse $A \# B = E$, $g(A \# B) = g(A) + g(B) = 0$ et comme le genre ne peut être négatif $g(A) = g(B) = 0$ et $A = B = E$.

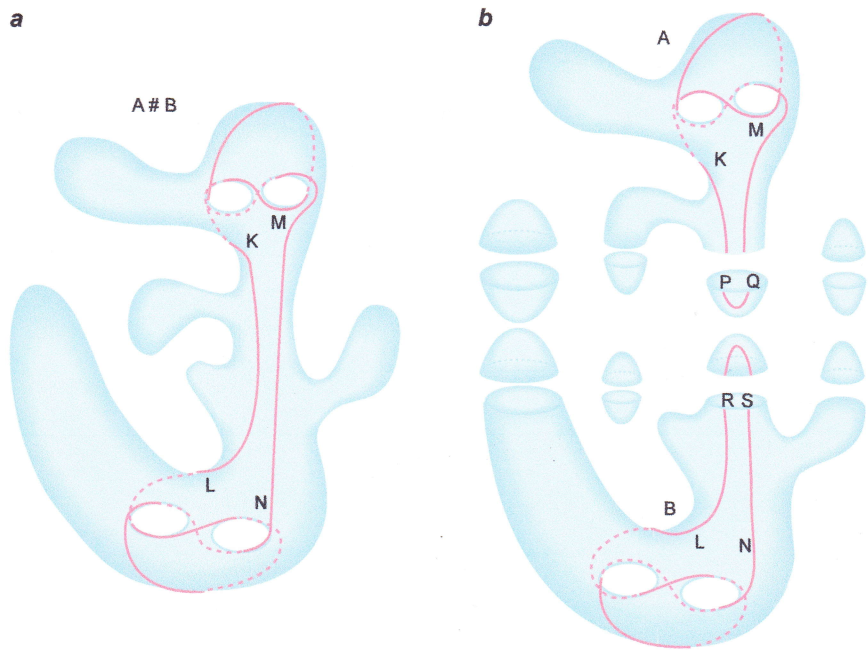
Genre et composition des nœuds

Revenons à une remarque précédente concernant le nombre d'anses à ajouter à une sphère, ces anses étant éventuellement entrelacées, pour définir le genre du nœud. Pour tout nœud, il existe au moins une sphère avec des anses sur laquelle le nœud peut être placé de façon à apparaître comme le contour de cette surface et par conséquent séparer cette surface en deux morceaux. On construit cette surface comme indiqué sur la figure 16 (où le nœud choisi est le nœud de trèfle) et si l'on admet que la surface est orientable, on peut insuffler de l'air entre le recto et le verso, et obtenir un volume où le nœud apparaît comme un contour. Ayant clarifié la définition du genre d'un nœud, démontrons maintenant l'égalité fondamentale, $g(A \# B) = g(A) + g(B)$, concernant le genre du composé de deux nœuds. D'abord il n'est pas difficile de montrer qu'on a : $g(A \# B) < g(A) + g(B)$.

En effet, prenons deux sphères avec l'une $2g(A)$ anses et l'autre $2g(B)$ anses : les contours apparents dessinent le nœud A sur la première et le nœud B sur la seconde, puis relions les deux sphères sous la forme d'un haltère avec $2(g(A) + g(B))$ anses, de manière à réaliser le nœud composé des nœuds A et B *(voir la figure 17)*. Il est clair que le contour, qui représente le nœud composé $A \# B$, divise en deux l'haltère, ce qui est la condition à vérifier. Ainsi, le genre de $A \# B$ est au plus égal aux genres additionnés de A et de B. Évidemment, on n'a pas démontré qu'il n'existe pas de représentation de $A \# B$ avec moins de boucles. C'est pourquoi, il n'est pas encore démontré que le genre de $A \# B$ est égal à la somme des genres.

Il est plus difficile de montrer qu'on a : $g(A \# B) \geq g(A) + g(B)$. Considérons une sphère avec $2g(A \# B)$ anses sur laquelle est dessiné le nœud $A \# B$ qui sépare en deux la surface. Par définition de la composition de A et B, nous pouvons toujours «séparer» les nœuds à une distance convenable, en les composant par deux segments parallèles *(KL et MN sur la figure 18a)*, quitte à «allonger» la sphère avec les anses dont nous étions partis. Prenons maintenant un plan qui sépare les nœuds A et B. Ce plan coupe la surface de la sphère munie de ses anses d'abord le long du «tube» qui contient les segments reliant les nœuds (ces segments appartiennent bien au même tube et non à deux tubes différents!). On referme chacune des deux ouvertures du tube avec un «morceau» de surface sur laquelle on dessine un arc qui referme chacun des nœuds *(PQ et RS sur la figure 18b)*. Ensuite il se peut que le plan ait découpé des «trous» dans des parties de la sphère ou des anses qui ne contiennent pas de morceaux des nœuds A ou B ; on referme ces trous avec des morceaux de surface (où aucun arc du nœud n'est dessiné).

Il est clair que chacun des nœuds obtenus, A ou B, est placé sur une sphère munie d'anses qu'il partage en deux et que la somme du nombre d'anses de chacune des sphères est égale au nombre d'anses dont était munie la sphère de départ, donc $g(A \# B) > g(A) + g(B)$, et, par conséquent, $g(A \# B) = g(A) + g(B)$, ce qu'il fallait démontrer.



18. Le genre du nœud composé est supérieur ou égal au genre de chaque nœud. Pour le prouver, on étire le nœud de façon qu'un plan ne coupe que deux brins du nœud composé $A \# B$, de manière à séparer les nœuds A et B. Il apparaît que la somme du nombre d'anses de A et de B est égale au nombre de la sphère de départ et, par conséquent, le genre du nœud composé est supérieur ou égal à la somme des genres.

C'est la fin de notre excursion. Les curieux pourront continuer seuls leur voyage dans la théorie des nœuds. Il va de soi que les démonstrations données dans cet article sont plus intuitives que rigoureuses ; il ne faudrait cependant pas croire que la théorie mathématique des nœuds n'a pas de bases topologiques solides. Si Felix Klein, le célèbre mathématicien, croyait qu'il était impossible de donner à la théorie des nœuds une base mathématique aussi rigoureuse que celle sur laquelle s'appuie le reste des mathématiques, bien des résultats obtenus depuis cette époque ont montré qu'il n'en était rien.

M. K. Fort Jr., *Topology of 3-Manifolds*, Prentice Hall Inc., Englewood, Cliffs, N. J., 1962.

Martin Gardner, *Encyclopédie Universalis* (Topologie) *Problèmes et diversements Mathématiques*, Tome 1, Dunod.

Martin Gardner, *Le paradoxe du pendu*, Dunod.