CONCOURS D’ADMISSION 2025

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°3

PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L’utilisation des calculatrices n’est pas autorisée pour cette épreuve

Les calculs numériques seront faits à la main et on se contentera d'estimations à un ou deux chiffres significatifs.

Le problème et l'exercice sont totalement indépendants.

Les calculs numériques seront faits à la main. On se contentera d'estimations d'ordre de grandeur, à un ou deux chiffres significatifs. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PROBLÈME

Cosmologie Newtonienne

Données numériques :

Constante de la gravitation universelle :	$G\ = 6.67\,.\,10^{-11} kg^{-1}m^3s^{-2}$
Vitesse de la lumière :	$c\ \ = 3\,.\,10^8 ms^{-1}$
Distance Terre-Soleil :	$D = 150\,.\,10^6 km$
Durée du jour :	$T_j = 24\,h = 86400\,s$
Durée de l'année :	$T_a = 365 T_j$

Formulaire ($\kappa > 0$ est une constante):

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+\kappa}}dx = \sqrt{x(x+\kappa)} - \kappa\,\mathrm{arcsinh}\sqrt{\frac{x}{\kappa}} \qquad (x>0)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{\kappa-x}}dx = -\sqrt{x(\kappa-x)} - \kappa\,\arcsin\sqrt{1-\frac{x}{\kappa}} \qquad (0<x<\kappa)$$

$$\mathrm{arcsinh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad \text{(argument sinus hyperbolique).}$$

On considère un système homogène et isotrope, consistant en une vaste boule formée de matière sous forme de poussière. La seule interaction entre ces poussières est la gravitation universelle de Newton. Nous supposerons qu'il n'y a pas d'autres forces (notamment, il n'y a pas de pression). Le cadre de cette étude sera non-relativiste : les vitesses sont négligeables par rapport à la vitesse de la lumière c.

La masse totale de cette boule de matière vaut M et elle est conservée. À l'instant initial, t_0, le rayon de la boule vaut R_0. Un grain de matière situé à une distance r du centre de la boule, avec $0 \leq r \leq R_0$ est animé d'une vitesse initiale $\vec{v}$ proportionnelle à sa distance au centre :

$$\vec{v}(r, t=0) = H_0 \vec{r} \qquad \text{avec} \qquad H_0 > 0$$

Cette vitesse initiale est purement radiale et elle croît linéairement avec la distance au centre. La valeur initiale H_0 est positive.

Sous ces hypothèses, on peut montrer – mais nous ne le ferons pas – qu'au cours de son évolution, le système demeure isotrope (il garde sa forme de boule) et homogène : la densité à l'intérieur de la boule est uniforme (mais elle varie avec le temps). Pour étudier l'évolution temporelle de cette boule, il suffira donc de s'intéresser à la dynamique de son rayon $R(t)$.

1. Si $R(t)$ représente le rayon de la boule à la date t, montrer que la densité à cette même date est donnée par

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3}$$

où ρ_0 est la densité initiale. La fonction $a(t)$, appelée *facteur d'échelle*, est définie par

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$$

La valeur de R_0 étant arbitraire, c'est sur ce facteur d'échelle, sans dimension, que nous travaillerons. Vérifier que $a(0) = 1$ et $\frac{da}{dt}(t=0) = H_0$.

2. Écrire, à partir des lois de Newton, l'équation dynamique satisfaite par $R(t)$ (on considérera une petite masse m située en $R(t)$ sur la circonférence de la boule).

3. Mettre l'équation précédente sous la forme

$$\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3} G \rho(t) a$$

4. En déduire la relation suivante

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = E$$

où $V(a) = -\frac{4\pi}{3} G \frac{\rho_0}{a}$ et E est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de H_0 et de ρ_0. Quelle est la dimension de E ? En déduire que le problème se ramène au mouvement d'une particule à une dimension dans le potentiel effectif $V(a)$, que l'on dessinera.

5. *On étudie d'abord le cas $E > 0$.*

5.a Discuter d'abord qualitativement la manière dont le facteur d'échelle a se comporte avec le temps en s'aidant du graphe de $V(a)$.

5.b En utilisant le formulaire ci-dessus, donner la relation entre a et le temps t (on exprimera le temps t en fonction de a et on n'essayera pas d'inverser cette formule).

Il sera utile d'introduire la constante κ définie par

$$\kappa = \frac{4\pi G\rho_0}{3E}$$

Quelle est la dimension de κ ?

5.c Que devient la relation entre a et t aux temps longs ? Interprétation physique ?

5.d Montrer qu'il existe un temps $t_\star$ pour lequel $a(t_\star) = 0$. Calculer $t_\star$. Que pouvez vous dire de son signe ? Donner le sens physique de $t_\star$.

5.e Esquisser le graphe de t en fonction de a, puis le graphe de $a(t)$ en fonction de t sur l'intervalle $[t_\star, +\infty]$. On montrera en particulier que pour des temps t légèrement superieurs à $t_\star$, on a

$$a(t) \simeq \left(\sqrt{2E\kappa}(t - t_\star)\right)^{3/2}$$

6. *On considère maintenant* $E < 0$. Il sera utile de poser $E = -|E|$.

6.a Montrer que dans ce cas le facteur d'échelle ne peut pas tendre vers l'infini. Plus précisément, montrer que, pour tout temps t

$$a(t) \leq \frac{4\pi G\rho_0}{3|E|}$$

Par analogie avec question 5.b, on appelera aussi κ le membre de droite de cette inégalité. Expliquer pourquoi l'on a $\kappa > 1$.

6.b Discuter qualitativement le comportement du facteur d'échelle a avec le temps. On distinguera deux phases, la première avec a croissant depuis $a(0) = 1$ jusqu'à sa valeur maximale κ. Puis avec a décroissant vers une valeur limite que l'on précisera.

6.c Pour la phase croissante, avec $\dot{a} > 0$, donner la relation entre le temps t et le facteur d'échelle a (on utilisera le formulaire).

- Montrer qu'il existe un temps t_{max}, que l'on calculera, auquel la boule atteint son rayon maximal admissible κ.
- Déterminer la date $t'_\star < 0$ à laquelle $a(t'_\star) = 0$.
- Montrer que

$$\sqrt{2|E|}\,(t_{max} - t'_\star) = \kappa\frac{\pi}{2}$$

6.d Étudier ce qui se passe pour $t \geq t_{max}$, quand $\dot{a} < 0$ et déterminer la relation entre t et a dans ce régime. Montrer qu'il existe un temps t_c avec $t_c > t_{max}$ pour lequel $a(t_c) = 0$. Vérifier que

$$t_c - t_{max} = t_{max} - t'_\star$$

Que signifie ce temps t_c ? Que se passe-t-il après ?

6.e En synthétisant les résultats de cette question 6, dessiner le graphe de $a(t)$ sur l'intervalle $[t'_\star, t_c]$.

7. Finalement, on s'intéresse au cas *critique* $E = 0$.

7.a Quelle relation cela impose-t-il entre H_0 et la densité initiale ? On appellera la valeur obtenue pour la densité, *la densité critique.*

7.b Calculer explicitement la fonction $a(t)$ en fonction du temps.

7.c Montrer que $a(t)$ s'annule à la date

$$t''_\star = -\frac{2}{3H_0}$$

et exprimer $a(t)$ comme une loi de puissance en $t - t''_\star$.

7.d Dessiner le graphe de la fonction $a(t)$ pour $t \geq t''_\star$.

7.e Calculer la densité $\rho(t)$ en fonction du temps. Comment interpréter le fait que la formule obtenue ne dépende pas de ρ_0 ?

8. Représenter sur un graphe unique les courbes pour $a(t)$ dans les trois cas $E > 0$, $E < 0$ et $E = 0$. On portera le temps sur l'axe horizontal et pour chaque courbe, on choisira comme l'origine des temps la date $t_\star$, $t'_\star$ ou $t''_\star$ (respectivement) pour lequel le facteur d'échelle s'annule.

On prend la boule de matière étudiée ci-dessus comme modèle de l'univers tout entier. Son évolution dynamique fournit une histoire de l'univers, une cosmologie newtonienne.

9. Interpréter les résultats principaux des questions 5, 6 et 7 en termes cosmologiques. En particulier: que représente H_0 ? Que signifient les temps $t_\star$, $t'_\star$ ou $t''_\star$?

10. On définit l'unité de longueur dite *parsec*, et notée *pc*, comme la distance à laquelle le rayon D de l'orbite terrestre est vu sous un angle d'une seconde (c'est-à-dire $\frac{1}{3600}^o$). Calculer ce que vaut un parsec en kilomètres et en années-lumière. Un Megaparsec, noté, Mpc vaut $10^6 pc$.

11. Les données connues sur l'univers privilégient le scenario critique, $E = 0$. Sachant que la valeur mesurée par le satellite Planck (2018) donne la valeur suivante pour H_0 :

$$H_0 \simeq 70, kms^{-1}Mpc^{-1}$$

calculer la valeur critique correspondante pour la densité de l'univers. À combien de protons par m^3 cela correspond-t-il ? (on rappelle que la masse du proton vaut $1,7\,10^{-27} kg$).

12. Déduire de la valeur mesurée de H_0 une estimation de l'âge de l'univers.

EXERCICE

Charge par influence à la surface d'un conducteur

On considère un conducteur parfait qui occupe tout le demi-espace $x \leq 0$. Au point $x = a > 0$ on place une charge positive q.

A. Que vaut le champ électrique à l'intérieur du conducteur ? Montrer que les charges électriques apparaissant dans ce conducteur sous l'influence de la charge q sont nécessairement situées à la surface du conducteur, c'est-à-dire sur le plan $x = 0$.

B. Montrer soigneusement la relation suivante entre le champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point M de la surface du conducteur $x = 0$ et la densité surfacique de charge $\sigma(M)$ sur le conducteur :

$$\vec{E}(M).\vec{n} = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}$$

($\vec{n}$ désigne le vecteur normal pointant vers l'extérieur).

C. On admet que, dans le demi-espace $x > 0$, le champ et le potentiel électrique sont identiques à ceux qui seraient donnés *dans le vide* (c'est-à-dire en l'absence du conducteur) par une charge q placée en a et une charge $-q$ placée en $-a$. En déduire la densité surfacique de charge $\sigma(M)$ sur le conducteur : on utilisera des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan $x = 0$. Faire un graphe représentant $\sigma(r)$ en fonction de r.

D. Calculer la charge totale portée par la surface du conducteur. En déduire l'explication physique de la solution proposée dans la question C ci-dessus. Tracer l'allure des lignes de champ dans ce problème.