CONCOURS D'ADMISSION 2025

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
FORMATION FRANCOPHONE
FUI-FF_ Session 2_Printemps

Épreuve n°1

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : un calcul d'intégrale

Pour $x \geqslant 0$ on pose

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t+x} \mathrm{d}t.$$

1. Étude de f.

a. Montrer que $f(x)$ est bien définie pour tout $x \geqslant 0$.

b. Montrer avec précision que la fonction f est de classe C^2 sur $]0, \infty[$, et également continue en 0.

c. Calculer $f + f''$ et en déduire que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

2. Étude de g.

a. Montrer que $g(x)$ est bien définie pour tout $x \geqslant 0$.

b. Montrer que g est de classe C^2 sur $]0, \infty[$.

Pour cela on pourra faire le changement de variable $u = t + x$ et exprimer g en fonction des fonctions $C : x \mapsto \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} \mathrm{d}u$ and $S : x \mapsto \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u$.

c. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par f.

3. Montrer que sur $]0, \infty[$ on a $f = g$. Pour cela on pourra utiliser une équation différentielle satisfaite par $(f - g)$ et utiliser le comportement de f et g en $+\infty$.

4. En utilisant l'expression de g obtenue à la question **2.b.**, montrer que g est continue en 0.

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

◇

Problème 2 : suites récurrentes linéaires

On notera $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées $d \times d$ à coefficients complexes et on identifiera $\mathbb{C}^d$ et l'espace des vecteurs colonnes de taille d.

Pour un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|$ et $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$. On pourra utiliser sans démonstration le fait que ceci définit des normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^d$.

Si A est une matrice de $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ on note $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A et on définit le rayon spectral $\sigma(A)$ par

$$\sigma(A) = \max\left\{|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}.$$

Partie 1 : Normes adaptées

1. Soit $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'application $x \mapsto \|Ax\|_\infty$ définisse une norme sur $\mathbb{C}^d$.

2. Étant donnée une matrice $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ on pose

$$|||A||| = \sup_{\|x\|_\infty \leqslant 1} \|Ax\|_\infty .$$

a. Montrer que ceci définit une norme sur $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ et qu'il existe $x_0 \in \mathbb{C}^d$ tel que $\|x_0\|_\infty = 1$ et $\|Ax_0\|_\infty = |||A|||$.

b. Montrer que pour tous $(A, B) \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ on a $|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$.

3. Pour $1 \leqslant i \leqslant d$ on pose $L_i = (a_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant d}$ le i^{e} vecteur ligne de A. Montrer que

$$|||A||| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \|L_i\|_1 .$$

4. a. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^d$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$. Exprimer la matrice $M' = (m'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ de u dans la base $\mathcal{B}' = (\alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_d e_d)$, où les α_i sont des nombres complexes.

b. On suppose que M est triangulaire supérieure. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir les α_i de sorte que pour $j > i$ on ait $\left|m'_{i,j}\right| < \varepsilon$.

5. Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{C}^d$ telle que pour tout $x \in \mathbb{C}^d$ on a

$$\|Tx\|' \leqslant (\sigma(T) + \varepsilon) \|x\|'$$

(on pourra choisir $\|\cdot\|'$ sous la forme $\|x\|' = \|Px\|_\infty$ pour une matrice P bien choisie)

6. Application : norme et rayon spectral.

a. Soit $T \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C telle que pour tout n on ait $|||T^n||| \leqslant C(\sigma(T) + \varepsilon)^n$.

b. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} |||T^n|||^{1/n} = \sigma(T)$.

c. Soit maintenant $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} |||A^n|||^{1/n} = \sigma(A)$.

d. Montrer l'équivalence

$$A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \sigma(A) < 1.$$

Partie 2 : Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

On considère dans cette partie une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres complexes définie par la donnée de $u_0, \ldots, u_d$ et la relation de récurrence linéaire

$$u_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i} + b,$$

où les a_i et b sont des nombres complexes.

On définit $P \in \mathbb{C}[X]$ par $P(X) = X^d - \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ et on suppose que

$$\text{toutes les racines complexes de } P \text{ sont de module strictement inférieur à 1.} \qquad (*)$$

7. Pour $n \geqslant 0$ on définit le vecteur $U_n \in \mathbb{C}^d$ par $U_n = (u_n, \ldots, u_{n+d-1})$ (on rappelle que U_n est identifié à un vecteur colonne).

Montrer que la suite (U_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$, avec $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ et $B \in \mathbb{C}^d$ sont des éléments que l'on précisera.

8. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A (on pourra raisonner par récurrence sur d).

9. On suppose dans cette question que $b = 0$. Montrer que (u_n) tend vers 0.

10. Dans le cas général, montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Partie 3 : Suite récurrentes linéaires à coefficients variables

On conserve les notations de la partie précédente et on considère maintenant une suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ satisfaisant une récurrence de la forme

$$v_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(n) v_{n+i},$$

où $v_0, \ldots, v_{d-1}$ sont donnés et pour tout $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, $(b_i(n))_{n \geqslant 0}$ est une suite à valeurs complexes convergeant vers a_i. On pose également pour tout $n \geqslant 0$, $V_n = (v_n, \ldots, v_{n+d-1})$. On suppose toujours l'hypothèse (*) satisfaite.

11. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe un entier $q \geqslant 1$ et un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\|V_{n+q}\|_\infty \leqslant (\sigma(A) + \varepsilon)^q \|V_n\|_\infty ,$$

où A est la matrice de la question 7.

12. En déduire que v_n tend vers 0.