Publications d'exercices - épreuves de Mathématiques - filière MP

Exercice 1

Soit $N \geqslant 1$ un entier et μ une probabilité sur $\{1, \cdots, N\}$, telle que $\mu(1) > 0$. On fixe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$, i.i.d., avec chaque X_n de loi μ. On définit

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

pour $n \geqslant 1$, avec $S_0 = 0$. Introduisons

$$E = \{S_0, S_1, \cdots\},$$

l'ensemble aléatoire des points visités.

1) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que

$$P(n \in E) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) P(n-k \in E).$$

2) On introduit les séries génératrices

$$F(z) = \sum_{n \geqslant 0} P(n \in E) z^n$$

et

$$G(z) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) z^k,$$

pour $|z| < 1$. Montrer que

$$F(z) = 1/(1 - G(z)),$$

pour $|z| < 1$.

3) Montrer que la fraction rationnelle $1/(1 - G(z))$ admet un pôle simple en 1 et que les autres pôles éventuels sont de module > 1. Montrer que c'est encore vrai en supposant plus généralement

$$\mathrm{pgcd}\{1 \leqslant k \leqslant N,\ \mu(k) > 0\} = 1$$

à la place de $\mu(1) > 0$.

4) En utilisant la décomposition en éléments simples de $1/(1 - G)$, établir que

$$P(n \in E) \to 1/E(X_1),$$

quand $n \to +\infty$.

Exercice 2

Soit $C^0([0,1],\mathbb{R})$, espace vectoriel muni de la norme uniforme.

Pour $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$ on pose :

$$Tf(t) = \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{f(s)\} - f(t).$$

1) Montrer que T est une application continue de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ dans lui-même.

2) Soit $f \geqslant 0$ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$, la suite

$$\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |T^n f(s)|\right)_{n\geqslant 0}$$

est décroissante.

3) Montrer que si f est K-lipschitzienne, alors Tf aussi, avec la même constante K.

4) Soit f K-lipschitzienne. Montrer que

$$\|T^n f\|_\infty \to 0,$$

quand $n \to +\infty$. Donner une "vitesse de convergence" en fonction de n et K.

Exercice 3

Sur $\mathbb{R}^n$, on considère les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. On note de la même manière les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, subordonnées respectivement à chacune de ces normes. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Calculer $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_1$.

2) Supposons

$$\|A\|_\infty \leqslant 1 \text{ et } \|A\|_1 \leqslant 1.$$

Etablir que $\|A\|_2 \leqslant 1$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-périodique, et $s = (s_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels. On pose :

$$M_n(f,s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(s_i).$$

On dira que $s = (s_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie si pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1-$périodique :

$$M_n(f,s) \to_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)dx.$$

1) Fixons f 1-périodique, quelconque. Montrer que $(M_n(f,s))_{n\geqslant 1}$ converge pour toute suite s si et seulement si f est constante.

2) Soit $s = (s_n)_{n\geqslant 1}$ équirépartie. Montrer que la convergence est encore vraie pour une fonction f continue par morceaux 1-périodique, par exemple une indicatrice d'intervalle.

3) Montrer que $s = (\sqrt{n})_{n \geqslant 1}$ est équirépartie.

Exercice 5

1) Soient a et b deux entiers positifs, premiers entre eux. Montrer qu'il existe $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$, il existe $r \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$ vérifiant

$$ar + bs = n.$$

2) Soit

$$S = \{s_1 < s_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N},$$

avec $s_1 \geqslant 2$, un semi-groupe, c'est-à-dire un sous-ensemble stable par multiplication. On dira que S est non-lacunaire si $s_{i+1}/s_i \to 1$.

Montrer que S est non-lacunaire ssi il existe $2 \leqslant p < q$ dans S tels que

$$\ln p / \ln q \notin \mathbb{Q}.$$

On pourra utiliser le résultat (admis) qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit dense, soit de la forme $a\mathbb{Z}$.

Exercice 6

On pose

$$I(x) \;=\; \int_0^\pi \log{(x+\cos t)^2}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que

$$I(x) \;=\; 2\pi \log 2 \;+\; 2I(0)$$

pour tout $x \in [-1,1]$ et en déduire la valeur de $I(x)$ pour $x \in [-1,1]$.

(b) Ecrire $I(0)$ sous forme d'une série convergente.

(c) Calculer $I'(x)$ pour $x > 1$, d'abord sous forme de série puis sous forme exacte.

(d) Calculer $I(x)$ pour tout $x \notin [-1,1]$.

Exercice 7

Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites positives telles que

$$\sum_{n\geq 0} a_n \;=\; 1, \qquad \sum_{n \geq 0} b_n \;<\; \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} n a_n \;=\; \infty.$$

On considère une suite $\{u_n\}$ vérifiant

$$u_n \;=\; b_n \;+\; \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}$$

pour tout $n \geq 0$.

(a) Etablir l'existence et l'unicité de $\{u_n\}$.

(b) Montrer que $\{u_n\}$ est bornée.

(c) On suppose $\{u_n\}$ convergente. Montrer que sa limite est nulle.

(d) On suppose $a_1 > 0$. Montrer que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 8

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et soit A l'ensemble des racines réelles des polynômes non nuls de E.

(a) Quelles sont les symétries de A ?

(b) Montrer que
$$A \cap]2, \infty[= \emptyset.$$

(c) Montrer que
$$[1/2, 2] \subset \bar{A}.$$

(d) Montrer que $A \backslash \{0\}$ est dénombrable et dense dans $[-2, -1/2] \cup [1/2, 2]$.

Exercice 9

On considère une table ronde avec $2n$ places numérotées ($n \geq 2$) où s'assoient aléatoirement n couples (A_i, B_i) avec alternativement un A et un B. On note

$$p_n \;=\; \mathbb{P}[A_i \text{ et } B_i \text{ non assis côte à côte pour tout } i = 1, \ldots, n].$$

(a) Expliquer pourquoi dans le calcul de p_n on peut se ramener au cas où chaque A_i est à la place $2i - 1$.

(b) Calculer le nombre de façons de choisir k chiffres non adjacents parmi $1, \ldots, n$.

(c) En déduire
$$p_n \;=\; 1 \;+\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} \left(\frac{(n-k)!}{n!} \right)$$
pour tout $n \geq 1$.

(d) Calculer $\lim_{n\to\infty} p_n$. Comparer ce résultat asymptotique à celui du "problème des chapeaux".

Exercice 10

Considérons $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 2$, muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs de rang $r \geqslant 1$. On étudie la question suivante : existe-t-il un projecteur

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

et une base orthonormée $(f_1, \cdots, f_n)$ tels que

$$p(f_i) = v_i$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$?

1) Traiter le cas $r = n$.

2) Supposons $n = 2$ et $r = 1$ et plaçons-nous dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'il y a des solutions si et seulement si

$$\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \geqslant 1.$$

3) Formuler le problème matriciellement à l'aide de la matrice V dont les colonnes sont $v_1, \cdots, v_n$. Généraliser le résultat du 2) en montrant que si $r = 1$, il y a une solution si et seulement si

$$\|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 \geqslant 1.$$

4) Dans le cas général, trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de V^tV pour que le problème ait une solution (on note ${}^tV$ la transposée de V).

Exercice 11

1) Soit $n \geqslant 2$ un entier et X_n, Y_n deux variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $\{1, 2 \ldots n\}^2$. Pour r rationnel, on définit

$$u_n(r) = P(X_n \neq Y_n \text{ et la droite } (X_nY_n) \text{ est de pente } r).$$

Donner un équivalent de la suite $(u_n(r))_n$ quand n tend vers $+\infty$.

2) Soit A_n, B_n deux variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $\{1, 2 \ldots n\}^2$ et indépendantes de X_n et de Y_n. Montrer que

$$P(X_n \neq Y_n,\ A_n \neq B_n, (A_nB_n) \mathbin{/\!/} (X_nY_n)) =_{n\to+\infty} O((\log n)/n^2).$$

Exercice 12

Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur $[0, 1]$. On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in E$, on ait

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leqslant C\left(\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.

Exercice 13

Soit G un groupe fini dont on notera 1 l'élément neutre. Un automorphisme ϕ de G (c'est-à-dire un isomorphisme de G sur G) est dit sans point fixe si pour tout $g \in G$, on a $\phi(g) = g$ entraîne $g = 1$. Si $n \geqslant 1$ est un entier, on dit que ϕ est d'ordre divisant n si l'automorphisme composé

$$\phi^n := \phi \circ \cdots \circ \phi$$

est l'identité de G.

1) Montrer que si ϕ est un automorphisme sans point fixe d'ordre divisant $n > 0$ alors pour tout $x \in G$, on a

$$x \cdot \phi(x) \cdot \phi^2(x) \cdots \phi^{n-1}(x) = 1.$$

En déduire qu'un groupe fini G admettant un automorphisme sans point fixe d'ordre exactement 2 est abélien.

2) En déduire que si ϕ est un automorphisme sans point fixe d'ordre 3 d'un groupe fini G alors pour tout $x \in G$, les éléments x et $\phi(x)$ commutent.

Exercice 14

1) Soient $N_1, \ldots, N_r$ des entiers deux à deux premiers entre eux. Montrer que pour tout r-uplet d'entiers $f_1, \ldots, f_r$ il existe un entier F tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on ait

$$F \equiv f_i \mod N_i.$$

2) Soient $N_1, \ldots, N_r$ des polynômes (complexes, si on veut) deux à deux premiers entre eux. Montrer que pour tout r-uplet de polynômes $f_1, \ldots, f_r$ il existe un polynôme F tel que N_i divise $F - f_i$ pour chaque i.

3) Montrer que si f et g sont deux polynômes *complexes* sans racine commune et $t > 0$ un entier, il existe h tel que

$$g \mid h^t - f.$$

4) Soit $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et soit $t > 0$ un entier. Montrer qu'il existe un polynôme h tel que

$$h(A)^t = A.$$

Exercice 15

1) Soit $T \subseteq G$ l'ensemble des éléments d'ordre fini d'un groupe G. Est-ce toujours un sous-groupe de G ?

2) Soient G un groupe et $S \subseteq G$ un sous-ensemble fini, stable par conjugaison : si $s \in S$ et $g \in G$, on a $gsg^{-1} \in S$. On munit S d'une relation d'ordre total.

Montrer que pour tout entier $r \geqslant 1$, tout produit de r éléments de S est aussi un produit de r éléments dans un ordre croissant : si

$$x = s_1 s_2 \cdots s_r,$$

il existe $s'_1 \leqslant \cdots \leqslant s'_r$ dans S tels que

$$x = s'_1 s'_2 \cdots s'_r.$$

3) Montrer que si T est fini, alors c'est un sous-groupe de G.

Exercice 16

Soit (x_n) une suite de réels telle que pour toute suite réelle (y_n) satisfaisant

$$\sum_{n \geqslant 0} y_n^2 < +\infty,$$

on ait convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} x_n y_n.$$

Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 < +\infty.$$

Exercice 17

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. On considère a, b des endomorphismes de E tels que

$$[a,b] := a\circ b - b\circ a = f\circ v$$

où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{M}(E, \mathbb{C})$.

1) Calculer le déterminant de $[a,b]$.

2) Montrer que a et b sont trigonalisables dans une même base.

3) On fixe a qui n'est pas une matrice scalaire. Montrer qu'on peut trouver b tel que le rang de $[a,b]$ est 1.

Exercice 18

On considère un triangle ABC (non plat). A chaque sommet on considère les deux trissectrices (intérieures). Pour chaque côté du triangle, on considère l'intersection des deux trissectrices les plus proches de ce côté. Le but de l'exercice est de montrer qu'on obtient un triangle équilatéral PQR.

1) On note les trois angles $3a$, $3b$, $3c$ (dans le même sens trigonométrique), et f, g, h les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles respectifs $2a$, $2b$, $2c$. Montrer que P est le point fixe de la rotation $g\circ h$ (avec P l'intersection la plus proche de (BC)).

2) Montrer que

$$f^3\circ g^3\circ h^3$$

est l'identité.

En notations complexes, on pose

$$f(z) = a_1 z + b_1 \ , \ g(z) = a_2 z + b_2 \ , \ h(z) = a_3 z + b_3.$$

3) Calculer les affixes p, q, r de P, Q, R en fonction des a_i et des b_i.

4) Montrer qu'il suffit d'obtenir

$$r + jp + j^2 q = 0$$

ou que

$$r + j^2 p + jq = 0.$$

5) Conclure.

Exercice 19

Soient q_1 et q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et y_1 et y_2 deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, telles que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$y_1''(t) + q_1(t)y_1(t) = 0 = y_2''(t) + q_2(t)y_2(t).$$

1) On suppose que $q_1 \leqslant q_2$. Montrer que si y_1 s'annule en u et v avec $u < v$ alors y_2 s'annule en un point de $[u, v]$.

On considère maintenant q continue sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $[m, M]$ avec $0 < m < M$. Soit y non identiquement nulle et solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation différentielle

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0$$

sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que les zéros de y forment une suite strictement croissante $(t_n)_n$ telle que

$$\pi/\sqrt{M} \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \pi/\sqrt{m}.$$

Exercice 20

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie munie d'une norme $\|.\|$. On suppose que pour tous $a, b \in A$,

$$\|ab\| = \|a\|\|b\|.$$

1) Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\|x - z_0\| \leqslant \|x - z\|$$

pour tous $z \in \mathbb{C}$.

On pose $a = x - z_0$.

2) Montrer que si $\|a\| = 2$, alors

$$\|a - e^{2ik\pi/n}\| \geqslant 2$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

3) En déduire que $\|a - 1\| = 2$ puis que $\|a - 5\| = 2$.

4) En déduire que $a = 0$. Conclusion ?

5) Proposer une autre preuve pour montrer que $A \simeq \mathbb{C}$.