Sélection d'exercices posés à l'oral de Polytechnique 2024, filière PC

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lesquelles il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{N}$, unitaire et de degré k tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(a_n) = \prod_{j=1}^{k} a_{n+j}$.

2. Calculer $\sum_{z\in\mathbb{U}_n} \dfrac{1}{2-z}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi \frac{k^2}{n}\right)$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $\mathrm{Re}\,(P(X+ia))$, polynôme dont les coefficients sont les parties réelles du polynôme $P(X+ia)$, est scindé sur $\mathbb{R}$.

5. Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \mapsto F$ est dite antilinéaire si $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(x+\lambda y) = f(x) + \overline{\lambda} f(y)$ Pour quels entiers n existe-t-il $f : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ antilinéaire telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}$?

6. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) A et B admettent au moins une valeur propre commune,
(ii) il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $PA = BP$.

7. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

8. Soit n un entier naturel impair. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = A$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun. Le résultat persiste-t-il pour n pair ?

9. Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB est diagonalisable.
a) Est-ce que que BA est diagonalisable ?
b) Montrer que :
$\dim\,(\ker(AB)) \leqslant \dim\,(\ker(B\,(AB)\,A)) \leqslant \dim\,(\ker(A\,(BABA)\,B)) \leqslant \dim\,(\ker(AB))$.

c) Est-ce que que $(BA)^2$ est diagonalisable ?

10. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres complexes de A ont une partie réelle strictement négative et que celles de B ont une partie réelle négative. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C = AM + MB$.

11. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (B, C) de matrices symétriques positives telles que $A = B - C$ et $BC = CB = 0$.

12. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_k(H) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i H A^{k-1-i}$.
a) Montrer que φ_k est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
b) À quelle condition φ_k est-elle injective ? surjective ? bijective ?

13. Soit $f \in \mathcal{L}\left(S_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\right)$ telle que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ f(M) \geqslant 0$. Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M \mapsto X^T M X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

14. Soit n un entier naturel impair. Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$. On note $C(A)$ (resp. $C(B)$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A (resp. B).

Montrer que $C(A) \cap C(B) = \mathbb{R} I_n$ si et seulement s'il n'existe pas deux sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^n$, stables par A et B, de dimension ≥ 1, tels que $F \oplus G = \mathbb{R}^n$.

15. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1. Montrer que les valeurs propres de AB sont strictement supérieures à 1.

16. On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes appartenant à E. Déterminer l'adhérence de A.

17. Chercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijective, continue, dont la réciproque est continue et telle que, pour toute droite $\mathcal{D}$, $f(\mathcal{D})$ est une droite.

18. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P_0\|_\infty = \min\{\|f - P\|_\infty, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

19. Soit E une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que $B(0,1) \subset E$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(E) \subset E$. Montrer que $|\det(M)| \leqslant 1$.

20. On note $a = \sqrt{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ a < \frac{k}{n} < a+1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - a}}$. Étudier la convergence de la suite (S_n).

21. Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^n + x^{1/n}$. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n tel que $f_n(x_n) = a$. Étudier la limite de (x_n) en fonction de a.

22. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{\sum_{k=0}^n a_k u_{n-k}}{\sum_{k=0}^n a_k}$.

a) Montrer que, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum v_n$ converge.
b) Est-ce toujours le cas si $\sum u_n$ ne converge pas absolument ?

23. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b,\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$.

24. Soit $f \in \mathcal{C}^0([\,0\,;2\pi\,], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, on a $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0$. Quel est le nombre minimal d'annulations de f ?

25. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0)f'(0) = 0$. Lorsque cela a un sens, on pose $\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt}$. Montrer que $(f')^2$ est intégrable et $\|f'\|^2 \leq \|f\|\ .\ \|f''\|$.

26. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge.

27. a) Pour $p \in \mathbb{R}$, calculer $\sup\left\{xp - \dfrac{x^2}{2}\ ;\ x \in \mathbb{Q}\right\}$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ contenant les fonctions constantes et tel que :

- pour toutes $f, g \in F$, la fonction $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est dans F ;
- pour toute suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions de F qui tend simplement vers une fonction f, la fonction f appartient à F.

Montrer que, si $f, g \in F$, alors $fg \in F$.

28. Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\dfrac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$. On admet que, si f est continue, alors (P_n) tend uniformément vers f sur $[0,1]$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ afin qu'il existe une suite de polynômes à coefficients entiers qui converge uniformément vers f.

29. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf'(x/2)$.

a) Chercher les $f \in \mathcal{S}$ développables en série entière.

b) L'espace $\mathcal{S}$ est-il de dimension finie ?

30. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0. Pour $t \in]-1,1[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$.

a) Vérifier que f est bien définie sur $]-1\,;1[$.

b) Montrer que $\lim_{t\to 1^-} tf(t) = 0$.

c) On suppose de plus qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_r$ et $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_r < \pi$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^r a_k \cos(n\theta_k)$. Montrer que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

31. La fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{k!}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1^-?

32. Pour $x \geqslant 0$, on pose $I(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

a) Écrire $I(x)$ sous la forme d'une série.

b) Montrer que $I(x) = \mathcal{O}(x^{-1/4})$ quand x tend vers $+\infty$.

33. On admet le théorème d'approximation de Weierstrass. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a, b > 0$. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a\,;a]$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$.

a) On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in [-b\,;b]$. Montrer que $f = 0$.

b) On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-b\,;b]$. Montrer que $f = 0$.

34. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' - 4xy = 0$.

Ind. Chercher les solutions développables en série entière.

35. Soient $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E) : y'' - py = 0$.

a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} y'(x) = 0$.

b) On admet que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe y vérifiant (E) et $(y(0), y'(0)) = (a, b)$.

Montrer que (E) admet une solution non bornée.

36. Soit $X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X'(t) = JSX(t)$, où $J = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

37. Déterminer les extrema globaux et locaux de $f : M \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A)$.

38. On lance une pièce une infinité de fois. On note S_n le nombre de successions de deux pile consécutifs dans les n premiers lancers.

a) Trouver $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

b) On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N},\ S_n = 1\}$. Calculer $G_T(t)$ et en déduire sa loi.

39. On étudie un groupe de cellules. À l'instant initial, $n = 0$, il y en a une. À chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3. Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.

40. Soient $p \in \,]0, 1[$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$ avec une probabilité p et $X_{n+1} = 0$ avec probabilité $1 - p$.

Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.