Exo PSI

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $E \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\}$. Que dire de la dimension de E ?

Exercice 2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, montrer que l'on peut écrire $f = f^+ - f^-$ où $f^\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ sont des fonctions positives.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la suite $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} u_n & = u_{n-1}^2 - 2 \text{ si } n \neq 0 \\ u_0 & = a \end{cases}.$$

On veut montrer que (u_n) est une suite bornée si et seulement si $a \in [-2; 2]$.

1. Vérifier que si $a = 0$, u est bornée. Pouvez-vous donner d'autres valeurs pour laquelle la suite est bornée ?
2. Soit $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, définie par $\varphi(b) = b + \frac{1}{b}$. Exprimer le terme général de la suite u_n pour $a = \varphi(b)$. Conclure.

Exercice 4.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est symétrique, a-t-on A symétrique ?
2. Donner une condition suffisante sur A pour que A^2 symétrique implique A symétrique.
3. Donner un exemple de matrice diagonalisable, dont le carré est symétrique mais qui n'est pas symétrique.

Exercice 5. *Soit $n \geq 1$. On considère la norme sur $\mathbb{R}^n$ donnée par $\|u\| := \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$. Montrer qu'il existe C telle que*

$$\forall u^1, \ldots, u^n \ \in \mathbb{R}^n, \ |\det(u^1, \ldots, u^n)| \leq C\|u^1\| \ldots \|u^n\|.$$

Que dire de l'infimum des C ? Montrer que cet infimum est

$$C = \max\{\det(A), \ A = (a_i^j)_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \ a_i^j \in \{-1, 1\}\}.$$

Exercice 6. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $f(x)/x$ se prolonge en une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 7. On définit

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \ \forall k, j \in \mathbb{N}, \ x^k \varphi^{(j)} \in L^\infty\}.$$

1. Montrer que pour tous $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $k, j \in \mathbb{N}$ on a que $x^k \varphi^{(j)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour que φ admette une primitive dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 8. On prend $n \geq 1$. Soit $(a_{i,j})_{i \leq n, j \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On considère la matrice aléatoire $A = (a_{i,j})_{i \leq n, j \leq n}$. Calculer $E(\det(A))$ et $\mathrm{Var}(\det(A))$.

Exercice 9. Soient d et n deux entiers > 0. Soit $E(d, n)$ l'ensemble des éléments $I := (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ tels que $i_1 + \cdots + i_d = n$. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = V_{d,n}$ des fonctions de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ engendré par

$$x = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto x^I := x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_d^{i_d}$$

pour tous les $I \in E(d, n)$.

1. Montrer que la famille des $(x \mapsto x^I)_{\in E(d,n)}$ est libre.
2. Calculer la dimension de V.
3. On définit $\Delta : V_{d,n} \to V_{d,n-2}$ par

$$\Delta(x \mapsto x^I) = (x \mapsto \sum_1^d \frac{\partial^2 x^I}{(\partial x_i)^2}.$$

Déterminer la dimension de $\ker(\Delta)$; on simplifiera la formule pour $d = 3$ (suggestion de David).

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

1. Montrer qu'un endomorphisme f de E qui commute avec tous les projecteurs est une homothétie.
2. Déterminer les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 11. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit alors

$$\begin{cases} F: & \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ & x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{it^2 x} dt \end{cases}$$

Montrer que l'on a $\lim_{|x| \to \infty} F(x) = 0$.

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que f est identiquement nulle en dehors de $[-M, M]$ pour un $M > 0$ donné. On définit $\hat{f}$ par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

1. Donner un exemple d'une telle fonction f (non nulle).
2. Montrer que $\hat{f}$ est bien définie et est même continue.
3. Montrer que $\hat{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (indication : on pourra remarquer $e^{-ix\xi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-ix\xi)^n}{n!}$).

Exercice 13. Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on considère un sous espace vectoriel V formé de matrices non inversibles.

1. Soit V un tel espace et $A \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A.V := \{AM,\ M \in V\}$$

et encore un sous espace vectoriel formé de matrices non inversibles et $\dim(A.V) = \dim(V)$. Même question pour $V^t := \{M^t,\ M \in V\}$.

2. Donner un exemple où $\dim(V) = 6$.
3. Montrer que $\dim(V) \leq 6$.