•**1** *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Déterminer les solutions de l'équation* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin A$, $A \in M(2, \mathbb{C})$.

Commentaire : Il s'agit d'un exercice élémentaire qui permet de tester l'aisance des candidats avec la réduction des endomorphismes dans un cas simple.

•**2** *Existe-t-il une suite de réels* $a_0, a_1, \ldots$ *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *le polynôme* $P_n(x) := a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ *admet* n *zéros simples réels dans l'intervalle* $]0,1[$ *?*

Commentaire : Une fois que l'on a pensé à considérer $Q_n(x) = x^n P_n(1/x)$ la solution découle d'une application répétée du théorème de Rolle.

• **3** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* 1*-périodique de classe* C^∞ *telle que* $\int_0^1 f(t)dt = 0$. *Démontrer que l'équation* $g(\cdot + \sqrt{2}) - g(\cdot) = f(\cdot)$ *admet une unique solution* 1*-périodique et* C^∞.

Commentaire : Cet exercice permet dans un premier temps de tester les connaissances des candidats sur les séries de Fourier (lien entre régularité de la fonction et décroissance de ses coefficients de Fourier). Il permet dans un second temps de tester, sur un problème de théorie des nombres, l'habileté des candidats à manipuler des inégalités.

• **4** *Soient* $m_1, \ldots, m_n$ *des constantes positives et* $x_1, \ldots, x_n$ *des réels strictement positifs. Posons*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{x - x_k}.$$

Montrer que l'ensemble des réels x *pour lesquels* $g(x)$ *est défini et vérifie* $g(x) > \lambda$ $(\lambda > 0)$ *est une union finie d'intervalles dont la somme* $l(\lambda)$ *des longueurs* $l_i(\lambda)$ *vérifie*

$$l(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Commentaire : L'exercice permet de tester les connaissances des candidats en algèbre (polynômes, fractions rationnelles).

• **5** *Soient* $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *telles que* $\int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty$, $\int_0^\infty |g(x)|^2 dx < \infty$. *Démontrer que*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dxdy \leq C \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

où C *est une constante universelle.*

Commentaire : Il s'agit d'un exercice qui permet de tester la maîtrise par les candidats des outils de base de l'intégration.

• **6** *On note H_n la matrice de coefficients $H_n(i,i) = V_i$, $H_n(i,j) = 1$ pour $|i-j| = 1$ et $H_n(i,j) = 0$ dans tous les autres cas.*

a) Démontrer que H_n admet n valeurs propres distinctes $\lambda_{n,i}$.

b) Démontrer que $\lambda_{n,1} < \lambda_{n-1,1} < \cdots < \lambda_{n-1,n-1} < \lambda_{n,n}$.

Commentaire : L'exercice permet de tester les connaissances des candidats en algèbre linéaire.

• **7** *Si* $M = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & B \end{pmatrix}$ *est (définie) positive, démontrer que* $\det M \leq \det A \det B$.

Commentaire : L' outil pour traiter cet exercice (qui nécessite un peu d'astuce) est Gram-Schmidt dans ses liens avec la théorie de la réduction simultanée des formes quadratiques (dont une est définie positive).

• **8** *a) Démontrer que le produit des coefficients diagonaux d'une matrice symétrique définie positive est supérieur au produit de ses valeurs propres.*

b) Démontrer que si A et b sont deux matrices symétriques positives, alors pour tous $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ on a

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta.$$

c) En déduire que $\det(A+B)^{1/d} \geq \det(A)^{1/d} + \det(B)^{1/d}$.

Commentaire : *Idem.*

• **9** *Soient α, β deux réels tels que pour une infinité d'entiers $n \in \mathbb{Z}$ (mais pas forcément tous) la quantité $u_n = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - n)^2}$ soit dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\alpha = 0$ et $\beta \in \mathbb{Z}$.*

Commentaire : Cet exercice est simple et permet de tester les connaissances de base des candidats en analyse (*via* la remarque qu'un entier non nul est plus grand que 1 en valeur absolue).

• **10** *Soitf $\in C^1([a,b], \mathbb{R})$. Etudier l'existence de la limite (et si elle existe la déterminer) de $\int_a^b \frac{f(t)\sin(nt)}{t} dt$ quand $n \to \infty$.*

Commentaire : La résolution de cet exercice se fat en écrivant $f(x) = f(0) + xg(x)$ avec g continue puis en intégrant par partie. L'exercice permet de se faire une idée du niveau du candidat en analyse.

• **11** *Soit P un polynôme constant à coefficients réels, et f une fonction C^∞ solution de $P(D)f = 0$ où D est l'opérateur de dérivation. Démontrer que si $\exists C$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq C(1 + \sqrt{|x|})$, f est bornée.*

Commentaire : Un des éléments de la preuve est de voir que si $\Re\lambda \neq 0$ et g est une combinaison linéaire de $e^{i\omega_j t}$ ($\omega_j \in \mathbb{R}$), la limite sup de $h(t) := e^{\lambda t} g(t)$ en ∞ ou $-\infty$ est infinie. Pour cela on calcule $T^{-1} \int_0^T |g(t)|^2 dt$ quand $T \to \infty$ et on vérifie que $\liminf_{t\to\pm\infty} |g(t)| \neq 0$ si g est non-nulle.

• **12** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé , K un compact de E et $f : K \to K$ une application qui vérifie pour tous $x, y \in K$*

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

Démontrer que f est une isométrie bijective.

Commentaire : Il faut étudier les points d'accumulation des suites $f^k(x)$, $x \in K$.

• **13** *$a > 0$, f continue telle que $\int_{\mathbb{R}} f^2(t)dt < \infty$. Il existe une unique solution L^2 à $y'(t) - ay(t) = f(t)$.*

Commentaire : L'exercice permet de vérifier que les candidats connaissent la formule de variation de la constante et savent manipuler des intégrales.

• **14** *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, n impair, telles que $AB + BA = A$. Démontrer que A et B admettent un vecteur propre commun. Le résultat est-il vrai si on enlève l'hypothèse n impair ?*

Commentaire : Une des matrices laisse invariant un espace propre de l'autre.

• **15** *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Démontrer que* $\max_{[0,1]} |f''| \geq 4$.

Commentaire : Taylor.