Épreuves orales de Physique, Filière MPI

L'épreuve de mathématiques de la filière MPI 2024 consistait en un oral de 50 min sans préparation. L'examinatrice avait préparé des planches de deux exercices : le premier, censément plus court et plus standard, et le second moins standard. Les exercices couvraient l'ensemble du programme : analyse, algèbre, topologie, probabilités et combinatoire.

Ci-dessous deux exemples d'exercices standard, un en algèbre linéaire et un en analyse, et un exemple d'exercice moins standard en topologie.

Exercice 1 : Soit u un opérateur auto-adjoint d'un espace vectoriel réel E de dimension finie n et muni d'un produit scalaire noté $< \cdot , \cdot >$. Soient $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E telle que pour tout i,
$< e_i, u(e_i) > = \lambda_i$.
Montrer que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de diagonalisation de u.

Correction 1 : On raisonne par récurrence sur la dimension de E. Le cas de la dimension 1 est trivial, toute base de E étant une base de diagonalisation de u.

Soit n>1 et par le théorème spectral, soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de diagonalisation de u. Pour tout x dans E, on a

$$< x, u(x) > = \sum_{i=1}^{n} < x, f_i >^2 \lambda_i \leq \lambda_n < x, x >$$

avec cas d'égalité lorsque x appartient au sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_n. On en déduit que $u(e_n) = \lambda_n e_n$. Comme u est auto-adjoint, l'orthogonal de $\{e_n\}$ est stable par u. On décompose alors E en la somme directe (et orthogonale) $E = \{e_n\}^\perp \oplus \mathbb{R}e_n$ et u comme $u = \lambda_n \mathrm{Id}_{\mathbb{R}e_n} \oplus v$ où v est l'opérateur de $\{e_n\}^\perp$ dans lui-même associant à tout x dans $\{e_n\}^\perp$ la valeur u(x). On vérifie que v est auto-adjoint (automatique), que ses valeurs propres sont $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$ (en exploitant la factorisation du polynôme caractéristique) et comme les e_i forment une base orthonormée, pour tout i<n, le vecteur e_i appartient à $\{e_n\}^\perp$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à v et conclure.

Exercice 2 : Soit R dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Limite de

$$I_N(R) = \int_0^R \frac{\sin(Nu)}{\sin u} du$$

lorsque N tend vers $+\infty$.

Correction 2 : On notera que la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(Nu)}{\sin u}$ est prolongeable par continuité en 0 par N.

Par intégration par parties (où tout est prolongeable par continuité en 0), on obtient

$$I_N(R) = \Big[\frac{1-\cos(Nu)}{N}\frac{1}{\sin u}\Big]_0^R + \int_0^R \frac{1-\cos(Nu)}{N}\frac{\cos u}{\sin^2 u}du\,.$$

En calculant explicitement le crochet et en faisant un changement de variable dans l'intégrale du membre de droite, on obtient

$$I_N(R) = \frac{1-\cos(NR)}{N\sin R} + \int_0^{NR} \frac{1-\cos(x)}{N^2\sin^2(x/N)}\cos(\frac{x}{N})dx\,.$$

La quantité $\dfrac{1-\cos(NR)}{N\sin R}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Quant à l'intégrale, on applique le théorème de convergence dominée. On considère la suite de fonctions $(f_N)_{N\geq 1}$ définie pour tout N et tout x par $f_N(x) = \mathbb{1}_{x\in]0,NR[}\dfrac{1-\cos(x)}{N^2\sin^2(x/N)}\cos(\dfrac{x}{N})$. Ces fonctions sont continues par morceaux et convergent vers la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, elle-même continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, pour tout x dans]0,NR[, on a x/N dans $]0,R[\subsetneq]0,\dfrac{\pi}{2}[$ et donc, d'une part $0\leq\cos(\dfrac{x}{N})\leq 1$ et d'autre part par concavité de $\sin$ sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, on a $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{x}{N}\leq\sin(\dfrac{x}{N})$. On en déduit que pour tout N et tout x,

$$0\leq f_N(x)\leq\frac{\pi^2}{4}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Cette dernière fonction étant intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir que

$$\lim_{N\to\infty} I_N(R) = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx.$$

Exercice 3 : On note E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$définis par

$$E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\mid\sum_n|x_n|<\infty\},\quad F = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\mid\sum_n n|x_n|<\infty\}.$$

On les munit respectivement des normes N_E et N_F définies pour tout x=$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E (resp. F) par les formules

$$N_E(x) = \sum_n|x_n|\quad(\text{resp}.\,N_F(x) = \sum_n n|x_n|)$$

ce qui leur confère une structure d'espace vectoriel normé.

Montrer que la boule unité fermée de F est compacte dans E. Il n'est pas demandé de montrer que N_E et N_F définissent des normes.

Correction 3 : Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de F appartenant à sa boule unité fermée, c'est-à-dire que $N_F(x^{(k)})\leq 1$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. On veut montrer que cette suite admet une valeur d'adhérence pour la topologie de E dans la boule unité de F.

Par définition, la suite $(x_1^{(k)})_k$ des premières coordonnées des$(x^{(k)})_k$ est bornée par 1. On en déduit qu'il existe une extractrice $\varphi_1$telle que $(x_1^{(\varphi_1(k))})_k$ converge vers une valeur $x_1 \in [-1,1]$. De la même façon, la suite $(x_2^{\varphi_1(k))})_k$ est bornée. On en déduit qu'il existe une extractrice φ_2 et une valeur $x_2 \in [-1,1]$ telle que $(x_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(k))})_k$ converge vers x_2. Comme la suite $(x_1^{\varphi_1\circ\varphi_2(k))})_k$ est une suite extraite de $(x_1^{(\varphi_1(k))})_k$, elle converge vers x_1. Par récurrence, on construit ainsi une suite d'extractrices $(\varphi_n)_n$ et une suite $(x_n)_n \in [-1,1]^{\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout n et tout $m \leq n$, on ait

$$x_m^{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n(k))} \to x_m$$

quand k tend vers $+\infty$.

Montrons que la suite x=$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à la boule unité fermée de F. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par inégalité triangulaire, pour tout k,

$$\sum_{m=1}^{n} m|x_m| \leq \sum_{m=1}^{n} m|x_m - x_m^{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_n(k))}| + \sum_{m=1}^{n} m|x_m^{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_n(k))}|.$$

Comme $(x^{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n(k))})_k$ est une suite extraite de $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, on en déduit qu'elle est à valeurs dans la boule unité de F et donc

$$\sum_{m=1}^{n} m|x_m| \leq \sum_{m=1}^{n} m|x_m - x_m^{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_n(k))}| + 1 .$$

A n fixé, on peut passer à la limite en k, ce qui donne

$$\sum_{m=1}^{n} m|x_m| \leq 1.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout n, on a bien que x est dans la boule unité de F.

Montrons que x est une valeur d'adhérence de $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ pour la topologie de E. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout k et tout n_0, on a,

$$N_E(x - x^{(k)}) = \sum_{n} |x_n - x_n^{(k)}| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |x_n - x_n^{(k)}| + \sum_{n>n_0} (|x_n| + |x_n^{(k)}|).$$

On utilise que pour $n > n_0$, on a $1 < \dfrac{n}{n_0}$ et on obtient

$$N_E(x - x^{(k)}) \leq \sum_{n=1}^{n_0} |x_n - x_n^{(k)}| + \frac{1}{n_0} \sum_{n>n_0} (n|x_n| + n|x_n^{(k)}|)$$

En utilisant l'appartenance à la boule unité de F, on a

$$N_E(x - x^{(k)}) \leq \sum_{n=1}^{n_0} |x_n - x_n^{(k)}| + \frac{2}{n_0} .$$

On choisit maintenant n_0 de sorte que $\dfrac{2}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et on obtient

$$N_E(x - x^{(k)}) \leq \sum_{n=1}^{n_0} |x_n - x_n^{(k)}| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite finie $(x_n)_{1 \leq n \leq n_0}$ est une valeur d'adhérence de la suite $((x_n^{(k)})_{1 \leq n \leq n_0})_k$ (pour l'extractrice $\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_{n_0}$), on en déduit qu'il existe $k \geq M$ tel que $\sum_{n=1}^{n_0} |x_n - x_n^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour conclure, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \geq M$ tel que $N_E(x - x^{(k)}) \leq \varepsilon$.

Remarques sur l'exercice 1 : Cet exercice a été donné deux fois. Dans les deux cas, sa résolution a été extrêmement fastidieuse. Le premier candidat a attendu qu'on lui demande s'il y avait un théorème du cours sur les opérateurs auto-adjoints pour parler du théorème spectral. Le deuxième l'a évoqué assez rapidement mais n'en a rien fait. Dans les deux cas, j'ai noté une insistance à vouloir exploiter la base des e_i pour faire des calculs plutôt qu'une base de diagonalisation donnée par le théorème spectral. Dans un des cas, et c'était assez typique des oraux d'algèbre linéaire, il y avait une certaine volonté à se ramener aux matrices des opérateurs sans que la correspondance ne soit tout à fait assimilée par les candidats. J'étais très étonnée compte tenu du fait qu'il s'agit d'un exercice somme toute assez classique. Notons qu'il existe une résolution matricielle de cet exercice ayant le mérite d'être efficace mais moins celui de mettre en lumière les connaissances sur les opérateurs auto-adjoints des élèves mais dont la mise en oeuvre aurait été parfaitement acceptable.

Remarques sur l'exercice 2 : Il s'agit d'un exercice sans surprise qui a été très mal traité. Dans un cas, j'ai noté que le candidat ne connaissait pas les hypothèses du théorème de convergence dominée et ignorait que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'était pas intégrable en $+\infty$. Dans le second cas, qui était mieux, j'ai noté que la domination dans le TCD était très compliquée à mettre en place, malgré mes indications. J'ai pris cet exercice en exemple mais il est symptomatique du fait que les candidats et les candidates étaient mal préparés dans leur ensemble à résoudre des exercices d'intégrales à paramètre.

Remarques sur l'exercice 3 : En revanche, j'étais positivement impressionnée sur cet exercice. Dans les cas où il a été posé, on m'a dit que comme on était en dimension infinie, fermé borné ne suffisait pas, ce qui dénote une forme de lucidité. Les manipulations de suites ne sont jamais particulièrement plaisantes mais dans un cas comme dans l'autre, cela n'a pas été une obstruction. J'ai noté de bonnes idées, l'utilisation de Bolzano—Weiertstrass est venue naturellement. Dans un cas comme dans l'autre, ils connaissaient la caractérisation des valeurs d'adhérence sans les suites extraites. Un candidat a eu besoin de plus d'aide que l'autre mais dans l'ensemble, c'était plutôt bien.

Remarques générales : Les exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire ainsi que les exercices d'analyse ont été plutôt mal traités, surtout les exercices très standards dont on s'attend à ce que les personnes admises à l'école polytechnique sachent résoudre sans se poser de question. La raison de ces défauts était la méconnaissance et le manque de maîtrise du cours. Bien entendu, je ne pense pas que la maîtrise du cours devrait être une condition suffisante à l'admission à l'école polytechnique, mais il me semble qu'elle devrait en être une condition nécessaire. A l'opposé, les exercices de combinatoire ont été bien traités, ce qui dénote un déséquilibre dans la préparation aux oraux. Je trouve cela très bien que les candidats et les candidates soient performants en combinatoire, mais pas quand c'est au détriment de l'algèbre linéaire et de l'analyse. Je suggèrerai très fortement à la personne qui prendra ma suite en tant qu'examinateur de ne pas ou peu poser d'exercices de combinatoire, car ces questions ne permettent pas de discriminer parmi les candidats et les candidates.

Sur un autre sujet, je regrette la très faible proportion de candidates, bien en-deçà même du pourtant faible taux de féminisation de la filière. J'encourage donc toutes les élèves de CPGE à s'inscrire au concours de l'école polytechnique où elles seront évaluées, me semble-t-il, sans discrimination de genre.

Sur une note plus positive, certains candidats et certaines candidates avaient bien sûr tout à fait leur place à l'oral de l'école polytechnique et les remarques négatives ci-dessus ne s'appliquent pas à leurs performances. J'ai beaucoup aimé la propreté dans la rédaction et la rigueur chez certains et certaines, la clarté des explications et le recul dans la recherche d'une solution chez d'autres, et aussi les connexions qui ont été faites avec le cours de physique, auxquelles je ne m'attendais pas.

41 candidats français et internationaux : moyenne = 11,12 /20 ; écart-type = 3,16